MAT302 - Cálculo 2

Bibliografia: Cálculo volume I, 5 edição. James Stewart

Prof. Valdecir Bottega

INTEGRAIS

Integral Indefinida pág. 403

Até aqui, nosso problema básico era:

encontrar a derivada de uma função dada.

A partir de agora, estudaremos o problema inverso:

encontrar uma função cuja derivada é dada.

Exemplo: Qual é a função cuja derivada é a função $F'(x) = 2x$?

$f(x) = x^2$, pois $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$. A função F é chamada uma antiderivada de F'.

Definição:

Uma *antiderivada* da função f é uma função F tal que

$$F'(x) = f(x)$$

em todo ponto onde $f(x)$ é definida.

Observação: Sabemos que $F(x) = x^3$ é uma antiderivada de $F'(x) = 3x^2$, assim como:

$$G(x) = x^3 + 1 \text{ e } H(x) = x^3 - 5.$$

Na verdade, qualquer função do tipo $J(x) = x^3 + C$ é antiderivada de $F'(x)$.

Teorema:

Se $F'(x) = f(x)$ em todo ponto do intervalo aberto I, então toda antiderivada G , de f em I, tem a forma

$$G(x) = F(x) + C$$

onde C é uma constante.

Assim, uma única função tem muitas antiderivadas. O conjunto de todas as antiderivadas da função $F'(x)$ é chamada *integral indefinida* (ou antidiferencial) de f com relação a x e denotada por $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

A operação de antidiferenciação, assim como a diferenciação, é linear:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \text{ (onde } c \text{ é uma constante)}$$

e

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

A integração e a diferenciação são operações inversas uma da outra. Este fato nos permite obter fórmulas de integração diretamente das fórmulas de diferenciação.

FÓRMULAS:

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ (se $n \neq -1$)	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \tan u du = \ln\lvert\sec u\rvert + C$
$\int dx = x + C$	$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$	$\int \cot u du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$	$\int \sec u du = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$	$\int \csc u du = \ln\lvert\csc u - \cot u\rvert + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$	

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$
$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

LISTA DE EXERCÍCIOS 1:

Calcule a integral de:

1) $\int \frac{1}{x^3} dx$
2) $\int 5u^{3/2} du$
3) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx$
4) $\int 6t^2 \sqrt[3]{t}\, dt$
5) $\int (4x^3 + x^2) dx$
6) $\int y^3(2y^2 - 3) dy$
7) $\int (3 - 2t + t^2) dt$
8) $\int (8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 5) dx$
9) $\int \sqrt{x}(x + 1) dx$
10) $\int (x^{3/2} - x) dx$
11) $\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5\right) dx$
12) $\int \frac{x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x}} dx$
13) $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$
14) $\int (3\sin t - 2\cos t) dt$
15) $\int (5\cos x - 4\sin x) dx$
16) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$
17) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$
18) $\int (4\csc x \cot x + 2\sec^2 x) dx$
19) $\int (3\csc^2 t - 5\sec t \tan t) dt$
20) $\int (2\cot^2\theta - 3\tan^2\theta) d\theta$
21) $\int \frac{3tg\theta - 4\cos^2\theta}{\cos\theta} d\theta$

Respostas:

1) $-\frac{1}{2x^2}+C$	2) $2u^{5/2}+C$	3) $3x^{2/3}+C$
4) $\frac{9}{5}t^{10/3}+C$	5) $x^4+\frac{1}{3}x^3+C$	6) $\frac{1}{3}y^6-\frac{3}{4}y^4+C$
7) $3t-t^2+\frac{1}{3}t^3+C$	8) $\frac{8}{5}x^5+x^4-2x^3-2x^2+5x+C$	9) $\frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{2}{3}x^{3/2}+C$
10) $\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{1}{2}x^2+C$	11) $-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}+5x+C$	12) $\frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{8}{3}x^{3/2}-8x^{1/2}+C$
13) $\frac{3}{4}x^{4/3}+\frac{3}{2}x^{2/3}+C$	14) $-3\cos t-2\sin t+C$	15) $5\sin x+4\cos x+C$
16) $\sec x+C$	17) $-\csc x+C$	18) $-4\csc x+2\tan x+C$
19) $-3\cot t-5\sec t+C$	20) $-2\cot\theta-3\tan\theta+\theta+C$	21) $3\sec\theta-4\sin\theta+C$

Integração por Substituição:

Trabalharemos algumas técnicas para integrar funções compostas. Essas técnicas envolvem uma substituição. O uso da substituição na integração pode ser comparado ao uso da Regra da Cadeia na diferenciação. Iniciaremos recordando a Regra da Cadeia da diferenciação.

Seja a função $y = f(g(x))$ com $y = f(u)$ e $u = g(x)$ funções diferenciáveis. Para calcular y' devemos utilizar a Regra da Cadeia e obteremos:

$$\boxed{y' = \frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)).g'(x) = f'(u).u'}$$

Exemplo: Derive a função composta $y = (x^2+3)^3$: Seja $u = x^2+3$. Então $y = u^3$. Utilizando a Regra da Cadeia, obtemos:

$y' = 3u^2.u' = 3u^2.(x^2+3)' = 3.(x^2+3)^2.2x$

Teorema:

Sejam f e g duas funções tais que $f\circ g$ e g' são contínuas em um intervalo I.

Se F é uma antiderivada de f em I, então:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Ex. 1: Calcule $\int e^{\cos x}\sin x dx$. Resp.: $-e^{\cos x}+C$

Ex. 2: Calcule $\int \cos(3x+1)dx$. Resp.: $\frac{1}{3}\sin(3x+1)+C$

Ex. 3: Calcule $\int \frac{2x-1}{x^2-x}dx$. Resp.: $\ln|x^2-x|+C$

Ex. 4: Calcule $\int e^{2x+1}dx$. Resp.: $\frac{1}{2}e^{2x+1}+C$

Ex. 5: Calcule $\int xe^{x^2}dx$. Resp.: $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

Ex. 6: Calcule $\int \frac{tdt}{\sqrt{t+3}}$ Resp.: $\frac{2}{3}\left(\sqrt{(t+3)}\right)^3-6\sqrt{(t+3)}+C$

LISTA DE EXERCÍCIOS 2:

Calcule a integral de:

1) $\int \sqrt[3]{3x-4}\,dx$	13) $\int \csc^2 2\theta d\theta$	25) $\int \dfrac{x^3dx}{\sqrt{1-2x^2}}$
2) $\int \sqrt{5r+1}\,dr$	14) $\int r^2\sec^2 r^3 dr$	26) $\int \sec x\tan x\cos(\sec x)dx$
3) $\int 3x\sqrt{4-x^2}\,dx$	15) $\int \dfrac{4\sin x dx}{(1+\cos x)^2}$	27) $\int \dfrac{dx}{3-2x}$
4) $\int x(2x^2+1)^6 dx$	16) $\int \sqrt{\frac{1}{t}-1}\,\dfrac{dt}{t^2}$	28) $\int \dfrac{3x}{x^2+4}dx$
5) $\int \dfrac{xdx}{(x^2+1)^3}$	17) $\int \sin 2x\sqrt{2-\cos 2x}\,dx$	29) $\int \dfrac{3x^2}{5x^3-1}dx$
6) $\int \dfrac{sds}{\sqrt{3s^2+1}}$	18) $\int \sin^3\theta\cos\theta d\theta$	30) $\int \dfrac{\cos t}{1+2\sin t}dt$
7) $\int x^4\sqrt{3x^5-5}\,dx$	19) $\int \dfrac{\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}x}{\sqrt{\sin\frac{1}{4}x}}dx$	31) $\int(\cot 5x+\csc 5x)dx$
8) $\int(x^2+1)^4 xdx$.	20) $\int \dfrac{\sec^2 3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$	32) $\int \dfrac{2-3\sin 2x}{\cos 2x}dx$
9) $\int x^3(2-x^2)^{12}dx$	21) $\int x(x^2+1)\sqrt{4-2x^2-x^4}\,dx$	33) $\int \dfrac{2x^3}{x^2-4}dx$
10) $\int(x^3+3)^{1/4}x^5dx$	22) $\int \sqrt{3+s}\,(s+1)^2ds$	34) $\int \dfrac{dx}{x\ln x}$
11) $\int \sin\frac{1}{3}xdx$	23) $\int(2t^2+1)^{1/3}t^3dt$	35) $\int \dfrac{\ln^2 3x}{x}dx$
12) $\int \frac{1}{2}t\cos 4t^2dt$	24) $\int\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^{3/2}\left(\dfrac{t^2-1}{t^2}\right)dt$	36) $\int \dfrac{2t+3}{t+1}dt$

Respostas

1) $\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{(3x-4)}\right)^4+C$	13) $-\frac{1}{2}\cot 2\theta+C$	25) $\frac{1}{12}(1-2x^2)^{3/2}-\frac{1}{4}(1-2x^2)^{1/2}$
2) $\frac{2}{15}\left(\sqrt{(5r+1)}\right)^3+C$	14) $\frac{1}{3}\tan r^3+C$	26) $\sin(\sec x)+C$
3) $-\left(\sqrt{(4-x^2)}\right)^3+C$	15) $\dfrac{4}{1+\cos x}+C$	27) $-\frac{1}{2}\ln\lvert 3-2x\rvert+C$
4) $\frac{1}{28}(2x^2+1)^7+C$	16) $-\frac{2}{3}\left(\dfrac{1}{t}-1\right)^{3/2}+C$	28) $\frac{3}{2}\ln(x^2+4)+C$
5) $-\dfrac{1}{4(x^2+1)^2}+C$	17) $\frac{1}{3}(2-\cos 2x)^{3/2}+C$	29) $\frac{1}{5}\ln\lvert 5x^3-1\rvert+C$
6) $\frac{1}{3}\sqrt{(3s^2+1)}+C$	18) $\frac{1}{4}\sin^4\theta+C$	30) $\frac{1}{2}\ln\lvert 1+2\sin t\rvert+C$
7) $\frac{2}{45}\left(\sqrt{(3x^5-5)}\right)^3+C$	19) $4\sin^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}x+C$	31) $\frac{1}{5}\ln(1-\cos 5x)+C$
8) $\frac{1}{10}(x^2+1)^5+C$	20) $\frac{2}{3}\tan 3\sqrt{t}+C$	32) $\ln(1+\sin 2x)+\frac{1}{2}\ln\lvert\cos 2x\rvert$
9) $-\dfrac{(2-x^2)^{13}}{13}+\dfrac{(2-x^2)^{14}}{28}+C$	21) $-\frac{1}{6}\left(\sqrt{(4-2x^2-x^4)}\right)^3+C$	33) $x^2+4\ln\lvert x^2-4\rvert+C$
10) $\frac{4}{27}(x^3+3)^{9/4}-\frac{4}{5}(x^3+3)^{5/4}+C$	22) $\frac{2}{7}\sqrt{(3+s)}^7-\frac{8}{5}\sqrt{(3+s)}^5+\frac{8}{3}\sqrt{(3+s)}^3$	34) $\ln\lvert\ln x\rvert+C$
11) $-3\cos\frac{1}{3}x+C$	23) $\frac{3}{56}(2t^2+1)^{7/3}-\frac{3}{32}(2t^2+1)^{4/3}+C$	35) $\frac{1}{3}\ln^3 3x+C$
12) $\frac{1}{16}\sin 4t^2+C$	24) $\frac{2}{5}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^{5/2}+C$	36) $2t+\ln\lvert t+1\rvert+C$

Somatório:

Trabalhamos no capítulo anterior com o conceito de integral indefinida ou antidiferencial. A partir deste momento trabalharemos com um novo problema: Como encontrar a área de uma região no plano. Essas duas noções estão relacionadas pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

O cálculo da área de uma região envolve a notação de somatório, que é uma forma abreviada de escrever somas de muitos termos. Esta notação utiliza a letra grega maiúscula sigma ($\sum$).

Definição;

A soma de n temos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é denotada por

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

onde i é o índice do somatório, a_i é o i-ésimo termo da soma e n e 1 são, respectivamente, os limites superior e inferior do somatório.

Exemplos:

1) $\sum_{i=1}^{4} i = 1 + 2 + 3 + 4$

2) $\sum_{j=2}^{5} j^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

3) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x$

Observações:

1) Os limites superior e inferior do somatório tem que ser constantes.
2) O limite inferior não precisa ser 1. Pode ser qualquer valor inteiro menor ou igual ao limite superior.
3) Qualquer variável (i,j ou k) pode ser usada como índice do somatório.

Área de uma região plana:

Definição:

Seja uma função contínua, não-negativa $y = f(x)$. Estudaremos a região A limitada inferiormente pelo eixo x, à esquerda pela reta $x = a$, à direita pela reta $x = b$ e superiormente pela curva $y = f(x)$.

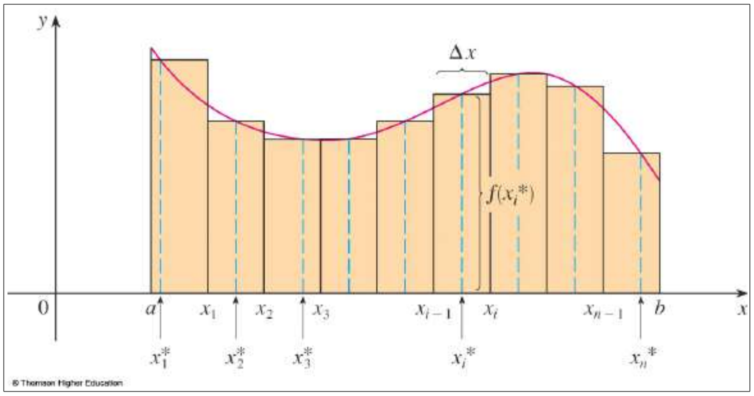
Podemos tentar a aproximação da área A tomando retângulos inscritos ou circunscritos. A somatória das áreas de cada retângulo pode ser usada como uma aproximação para a área desejada.

A altura de cada retângulo é o valor da função $f(x)$ para algum ponto t ao longo da base do retângulo. Escolhemos Δx para a base de cada retângulo. A área será aproximadamente igual à somatória:

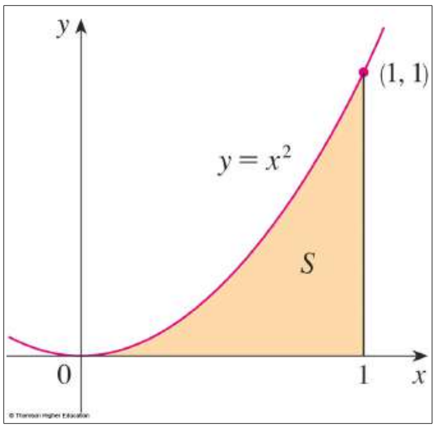
$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x$

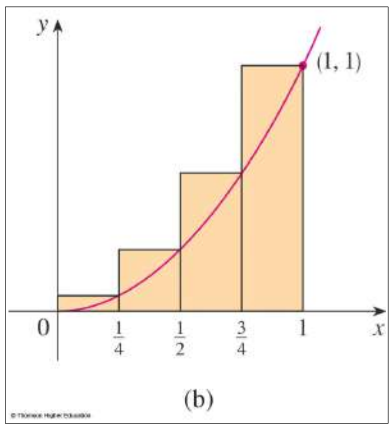
$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

quando usamos n retângulos com base Δx e x_i como um ponto ao longo da base do i-ésimo retângulo.



Exemplo: Calcule a área abaixo da função $y = x^2$ de $x = 0$ à $x = 1$.





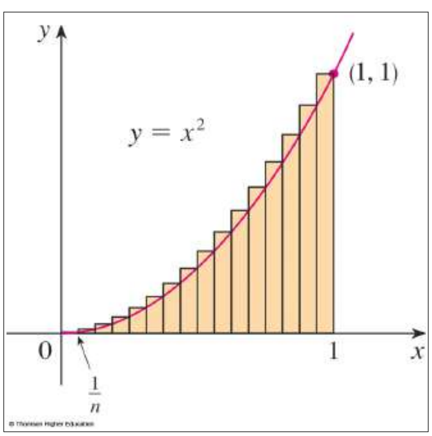
$$R_4 = \tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\cdot 1^2$$
$$= \tfrac{15}{32}$$
$$= 0.46875$$

Observação: Quanto menor escolhermos a largura Δx , melhor será a aproximação da área sob a curva. Quando $\Delta x \to 0$, o número de termos n da somatória de aproximação S_n aumenta. De fato, quando $\Delta x \to 0$, $n \to \infty$ e a somatória S_n se aproxima da área exata A sob a curva. Este processo pode ser simbolizado por:

$\lim_{n\to\infty} S_n = A.$

No exemplo anterior,

$$R_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$
$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$
$$= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$



$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$R_n = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2$$
$$= \frac{1}{3}$$

A Integral Definida:

A área definida acima é chamada a integral de f no intervalo $[a,b]$, a qual é indicada com o símbolo

$$\int_a^b f(x)dx$$

Por definição:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x.$$

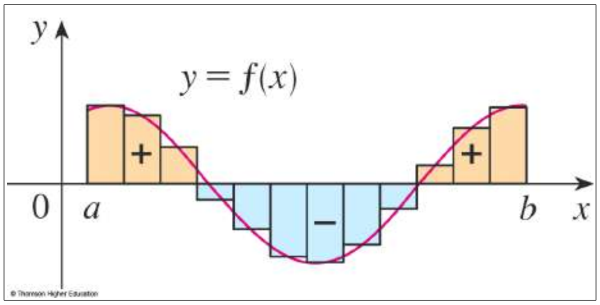
Quando este limite existe, dizemos que a função f é integrável no intervalo $[a,b]$.

Nota: Toda função contínua num intervalo fechado é integrável nesse intervalo.

A integral no intervalo $[a,b]$ é lida como " integral de a até b" e esses números a e b são chamados os limites de integração (inferior e superior, respectivamente), a função f é chamada integrando. O símbolo $\int$ de integral é devido a Leibniz, uma antiga grafia da letra S de soma, usado para lembrar que estamos trabalhando com o limite de uma seqüência de somas (soma de Riemann).

Observação:

Dada uma função f:



Observe que quando $f(x) > 0$ o retângulo está "acima" do eixo x e quando $f(x) < 0$ o retângulo está "abaixo" do eixo x. A soma de Riemann é a soma das áreas, considerando os sinais dos retângulos, isto é, se o retângulo está para cima do eixo x a soma das áreas é "positiva" e se o retângulo está para baixo do eixo x, a soma das áreas é "negativa". Isto sugere que a $\int_a^b f(x)dx$ será a soma das áreas dos retângulos acima do eixo x , mais a soma das áreas dos retângulos abaixo do eixo x $(A_{acima} + A_{abaixo})$.

Por exemplo, $f(x) = 2x$. $\int_{-2}^{1} f(x)dx = -3$, pois a soma das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x é -4 e a soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x é 1. Portanto, $A_{acima} + A_{abaixo} = -4 + 1 = -3$. Note que $\int_{-2}^{1} f(x)dx$ não representa a área da região limitada pela curva, pelo eixo x e pelas retas $x = -2$ e $x = 1$. Para que a integral represente a área, a função f deverá verificar as seguintes condições:

1) f é contínua no intervalo fechado $[a,b]$;
2) f é não-negativa no intervalo fechado $[a,b]$.

Aí sim, a área da região limitada pelo gráfico da função f, o eixo dos x e as retas verticais $x = a$ e $x = b$ é dada por

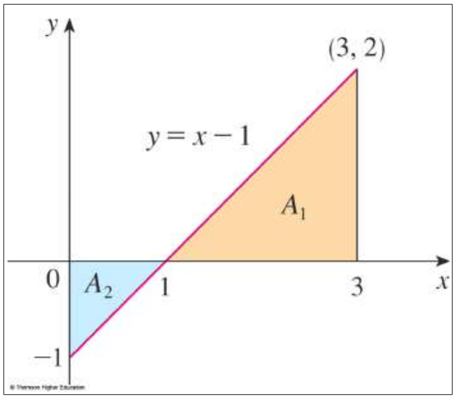
$$\boxed{\text{Área} = \int_a^b f(x)dx}$$

Atenção:

1) Quando $f(x) < 0$, a Área $= -\int_a^b f(x)dx$.
2) É importante notar que, a integral definida é um número e a integral indefinida é uma família de funções.

Exercício:

Calcule $\int_0^3 (x-1)dx$ e construa os gráficos das funções envolvidas:



$$\int_0^3 (x-1)dx = A_1 - A_2 = \tfrac{1}{2}(2\cdot 2) - \tfrac{1}{2}(1\cdot 1) = 1.5$$

Integrais Particulares:

$\int_a^a f(x)dx = 0$, para f definida em $x = a$.
$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, para f integrável em $[a, b]$.

Propriedades da Integral Definida:

1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, para f integrável nos três intervalos fechados determinados por a, b e c.
2) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, para f integrável em $[a, b]$ e $k \in \Re$.
3) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$, para f e g integráveis em $[a, b]$.
4) $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, para f integrável e não-negativa no intervalo fechado $[a, b]$.
5) $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$, para f e g integráveis no intervalo fechado $[a, b]$ e $f(x) \leq g(x)$ para todo x em $[a, b]$.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO:

Parte 1:

Seja f contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e F uma função tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Então,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Exemplo 1: Ache a derivada da função $F(x) = \int_0^x t^3 dt$.

Exemplo 2: Ache a derivada da função $F(x) = \int_0^x (t^2 - 2t)dt$.

Parte 2:

Seja f contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e F uma função tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Então,

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ex. 1: Calcule $\int_1^2 x^3 dx$. Resposta: $\frac{15}{4}$

Ex. 2: Calcule $\int_3^6 (x^2 - 2x)dx$. Resposta:36

LISTA DE EXERCÍCIOS 3:

Calcule a integral de:

1) $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2}dx$ R.: 3/2	5) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx$ R.: 1	9) $\int_{-2}^{5} \lvert x-3 \rvert dx$ R.: 29/2
2) $\int_0^1 \frac{z}{(z^2+1)^3}dz$ R.: 3/16	6) $\int_1^2 t^2\sqrt{t^3+1}\,dt$ R.: $2/9(27-2\sqrt{2})$	10) $\int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1}\,dx$ R.: 256/15
3) $\int_1^{10} \sqrt{5x-1}\,dx$ R.: 134/3	7) $\int_0^1 \frac{(y^2+2y)}{\sqrt[3]{y^3+3y^2+4}}dy$ R.: $2-\sqrt[3]{2}$	11) $\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}dx$ R.: 5/6
4) $\int_{-2}^{0} 3w\sqrt{4-w^2}\,dw$ R.: -8	8) $\int_0^{15} \frac{wdw}{(1+w)^{3/4}}$ R.: 104/5	12) $\int_0^1 \sin \pi x \cos \pi x dx$ R.: 0

13) Lista de exercícios 5.3 página 400 exercícios 19 ao 32.

Use o teorema fundamental do cálculo, parte 2, para calcular a integral, ou explique por que ela não existe.

19. $\int_{-1}^{3} x^5\,dx$

20. $\int_{-2}^{5} 6\,dx$

21. $\int_2^8 (4x+3)\,dx$

22. $\int_0^4 (1+3y-y^2)\,dy$

23. $\int_0^1 x^{4/5}\,dx$

24. $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$

25. $\int_1^2 \frac{3}{t^4}\,dt$

26. $\int_{-2}^{3} x^{-5}\,dx$

27. $\int_{-5}^{5} \frac{2}{x^3}\,dx$

28. $\int_{\pi}^{2\pi} \cos\theta\,d\theta$

29. $\int_0^2 x(2+x^5)\,dx$

30. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

31. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 t\,dt$

32. $\int_0^1 (3+x\sqrt{x})\,dx$

Respostas

7. $g'(x) = \sqrt{1+2x}$ **9.** $g'(y) = y^2 \operatorname{sen} y$ **11.** $F'(x) = -\cos(x$

13. $h'(x) = -\operatorname{arctg}(1/x)/x^2$ **15.** $y' = \frac{\cos\sqrt{x}}{2x}$ **17.** $y' = \frac{3(1-3x)^2}{1+(1-3x)^2}$

19. $\frac{364}{3}$ **21.** 138 **23.** $\frac{5}{9}$ **25.** $\frac{7}{8}$ **27.** Não existe

29. $\frac{156}{7}$ **31.** 1 **33.** Não existe **35.** ln 3

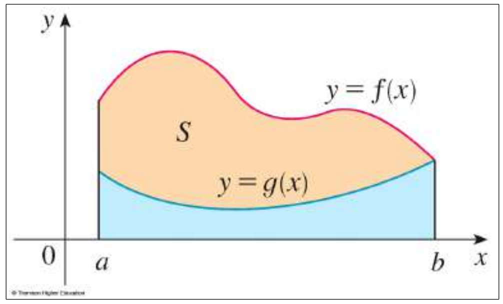
37. π **39.** e^2-1 **41.** 10,7 **43.** $\frac{243}{4}$ **45.** 2

ÁREAS DE REGIÕES PLANAS:

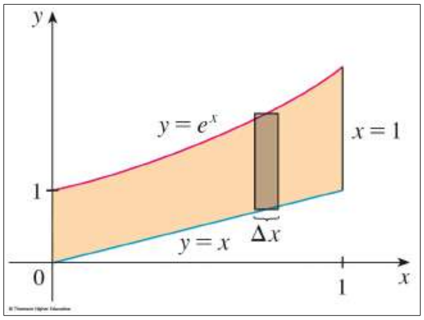
CÁLCULO DE ÁREAS POR INTEGRAÇÃO EM x :

Seja uma região num plano xy , limitada em cima pela função $y = f(x)$, embaixo pela curva $y = g(x)$ e que se estenda desde $x = a$ até $x = b$. Se as integrais de $f(x)$ e $g(x)$ de $x = a$ até $x = b$ existem então a área da região é

$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

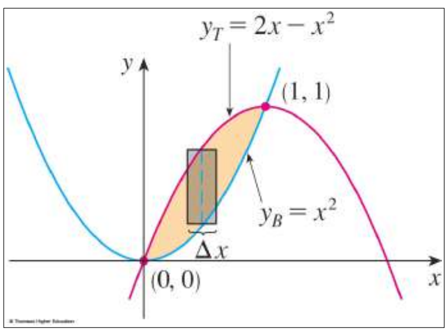


Ex. 1: Calcule a área limitada pelas parábolas $y = e^x$ e $y = x$ e pelas reta verticais $x = 0$ e $x = 1$.



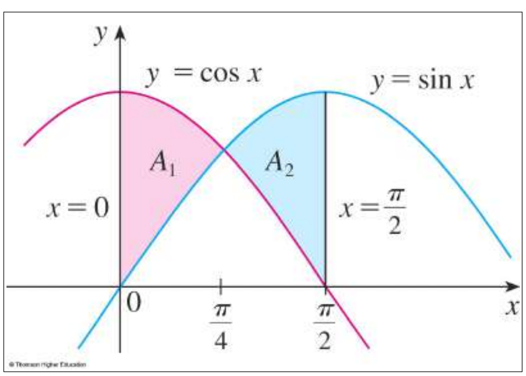
$$A = \int_0^1 \left(e^x - x\right)\,dx = e^x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^1$$
$$= e - \frac{1}{2} - 1 = e - 1.5$$

Ex. 2: Calcule a área limitada pelas parábolas $y = 2x - x^2$ e $y = x^2$.



$$A = \int_0^1 \left(2x - 2x^2\right)\,dx = 2\int_0^1 \left(x - x^2\right)\,dx$$
$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Ex. 3: Ache a área da região delimitada pelos gráficos das funções $y = senx$ e $y = \cos x$ de $x = 0$ até $x = \frac{\pi}{2}$.



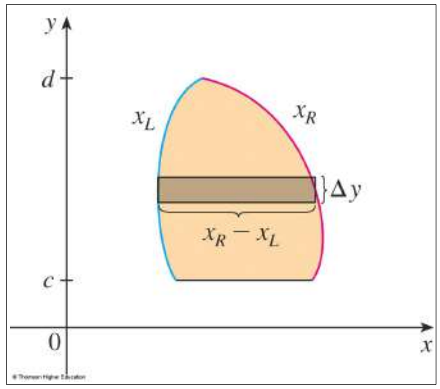
$$A = \int_0^{\pi/2} \left|\cos x - \sin x\right|\,dx = A_1 + A_2$$
$$= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\,dx$$
$$= \left[\sin x + \cos x\right]_0^{\pi/4} + \left[-\cos x - \sin x\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1\right) + \left(-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= 2\sqrt{2} - 2$$

Ex. 4: Ache a área da região delimitada pelos gráficos das funções $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ de $x = 0$ até $x = 1$:
Resposta: $\frac{1}{3}$ u.a.
Ex. 5: Calcule a área limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = -x^2$ e pela reta vertical $x = 2$:
Resposta: $\frac{16}{3}$ u.a.
Ex. 6: Ache a área da região delimitada pelos gráficos das funções $y + x^2 = 6$ e $y + 2x - 3 = 0$ de $x = -1$ até $x = 3$:
Resposta: $\frac{32}{3}$ u.a.

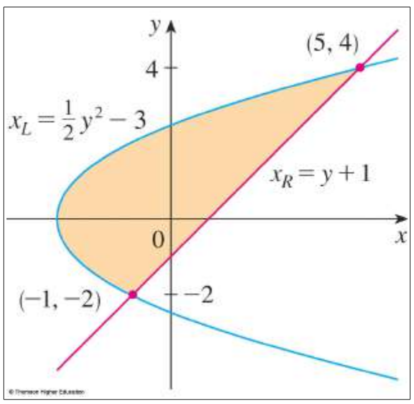
CÁLCULO DE ÁREAS POR INTEGRAÇÃO EM y :

Seja uma região limitada à direita pela curva $x = M(y)$ e à esquerda pela curva $x = N(y)$ de $y = c$ embaixo até $y = d$ em cima. A área da região é

$A = \int_c^d [M(y) - N(y)]dy$ ou $A = \int_c^d [x_r - x_l]dy$



Ex. 1: Trace a região limitada pela parábola $y^2 = 2x + 6$ e pela reta $x = y - 1$, calcule a área:



$$A = \int_{-2}^{4} (x_R - x_L)\, dy$$
$$= \int_{-2}^{4} \left[(y+1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy$$
$$= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y \Big]_{-2}^{4}$$
$$= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18$$

Ex. 2: Trace a região limitada pela parábola $x = y^2$ e pelas retas $x = y - 1$, $y = -1$ e $y = 1$, calcule a área:
Resposta: $\frac{8}{3}$ u.a.
Ex. 3: Trace a região limitada pela parábola $x = -y^2$ e pelas retas $x - y = 4$, $y = -1$ e $y = 2$, calcule a área:
Resposta: $\frac{33}{2}$ u.a.

LISTA DE EXERCÍCIOS 4:
1) Ache a área da região limitada por:
a) $y = x^2 - 2x + 3$, eixo x, $x = -2$ e $x = 1$. R.: 15
b) $y = 6 - x - x^2$, eixo x. R.: 125/6
c) $y = x^2 - 6x + 5$, eixo x. R.: 32/3
d) $y = x^2$, $y = 18 - x^2$. R.: 72
e) $x = 4 - y^2$, $x = 4 - 4y$. R.: 32/3
f) $x = y^2 - y$, $x = y - y^2$. R.: 1/3
2) A área da região limitada pelos gráficos de $y = x^3$ e $y = x$ não pode ser calculada utilizando-se apenas a integral $\int_{-1}^{1} (x^3 - x)dx$. Explique por quê. Em seguida use um argumento de simetria para escrever uma só integral que represente a área em questão.
3) Utilize integração para calcular a área do triângulo cujos vértices são $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,4)$. R.: 8.
4) Ache, por integração, a área do triângulo tendo vértices $(3,4)$, $(2,0)$ e $(0,1)$. R.:9/2
5) Determine a área da região limitada pelos gráficos das equações $y = e^x$ e $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ e $x = 1$. Resposta: 1,05 u.a.
6) Ache a área da região delimitada pelos gráficos das funções $y = x$ e $x + y = 4$ de $x = 0$ até $x = 2$:
Resposta: 4 u.a.
7) Ache a área da região delimitada pelos gráficos das funções $x = y^2$ e $x = 2y$ de $x = 0$ até $x = 4$:
Resposta: $\frac{4}{3}$ u.a.

8) Trace a região limitada pela parábola $x = 4Y - y^2$ e pelas retas $x = 0$ e $y = 0$, calcule a área:
Resposta: $\frac{32}{3}$ u.a.
9) Ache a área da região delimitada pelos gráficos das funções $x = y^2$ e $x = 2y$ de $y = 0$ até $y = 2$:
Resposta: $\frac{4}{3}$ u.a.
10) Ache a área da região delimitada pelos gráficos das funções $x = y^2$ e $x - y = 2$ de $y = -1$ até $y = 2$:
Resposta: $\frac{9}{2}$ u.a.
11) Calcule as áreas das regiões abaixo.
a) Limitada pela reta $y = -3x + 2$, pelo eixo x e pelas retas $x = -5$ e $x = -1$. R.: 44
b) Limitada pela curva $y = 4 - x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 2$. R.: 5/3
c) Limitada pela curva $y = 12 - x - x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = -3$ e $x = 2$. R.: 305/6
d) Limitada pela curva $y = x^3 - 4$, pelo eixo x e pelas retas $x = -2$ e $x = -1$. R.: 31/4

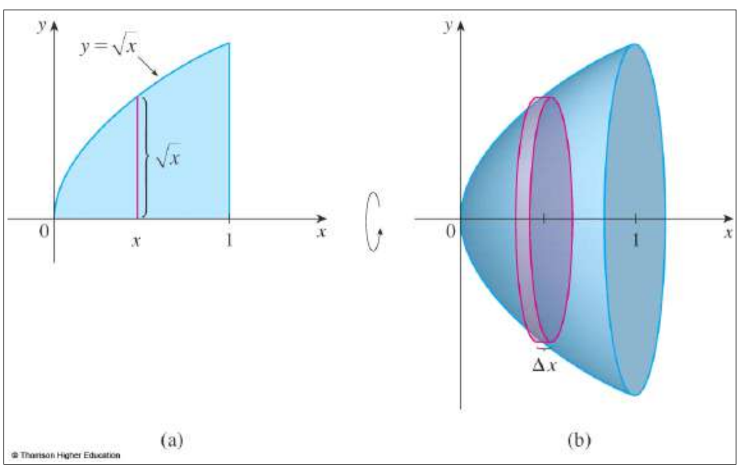
VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO:

MÉTODO DOS DISCOS (CILINDROS):

Suponhamos que a parte superior de uma região R seja uma função $y = f(x)$ e a parte inferior, a reta $y = L$, de $x = a$ até $x = b$. Então, o sólido gerado pela rotação da região R em torno da reta $y = L$ tem volume:

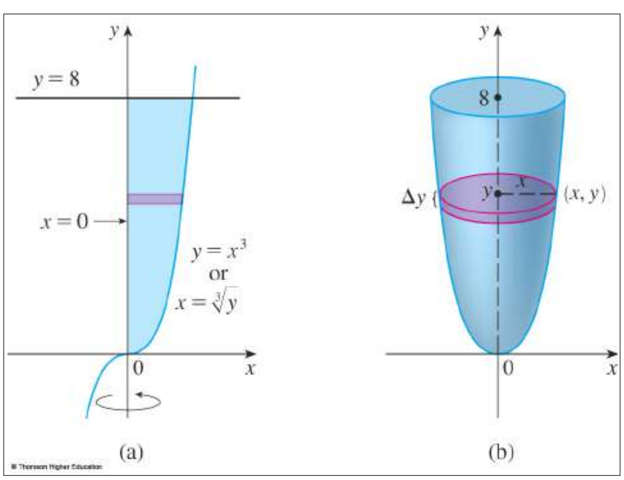
$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi[f(x) - L]^2 dx$$

Ex. 1: Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela função $y = \sqrt{x}$, girando em torno da reta $y = 0$ para $x = 0$ até $x = 1$:



$$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi x dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Ex. 2: Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela função $y = x^3$, girando em torno do eixo $y = 0$ para $y = 0$ até $y = 8$



$$V = \int_0^8 A(y)\,dy = \int_0^8 \pi y^{2/3} dy = \pi\left[\tfrac{3}{5} y^{5/3}\right]_0^8 = \frac{96\pi}{5}$$

Ex. 3: Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela função $y = x^3$, girando em torno da reta $y = -1$ para $x = -1$ até $x = 1$:
Resposta: $\frac{16}{7}\pi$ u.v.

Ex. 4: A região delimitada pelo eixo x, pelo gráfico da função $y = x^2 + 1$ e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$ gira em torno do eixo x. Determine o volume do sólido resultante:
Resposta: $\frac{56}{15}\pi$ u.v.

Ex. 5: A região delimitada pelo eixo y e pelos gráficos de $y = x^3$, $y = 1$ e $y = 8$ gira em torno do eixo y. Determine o volume do sólido resultante:
Resposta: $\frac{93}{5}\pi$ u.v.

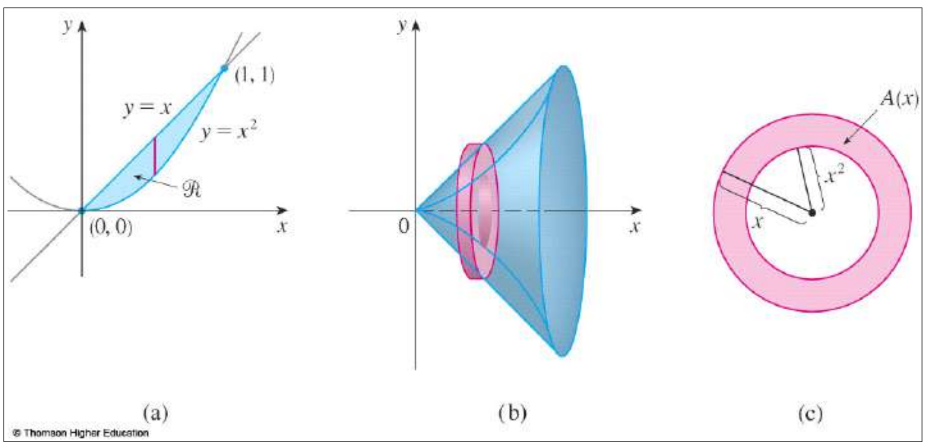
MÉTODO DOS ANÉIS:

Suponhamos que a parte de cima de uma região R seja $y = f(x)$ e a parte de baixo seja $y = g(x)$ de $x = a$ até $x = b$, então o volume do sólido gerado pela rotação da região R em torno da reta horizontal $y = L$ é

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi\{[R(x)]^2 - [r(x)]^2\}dx$$

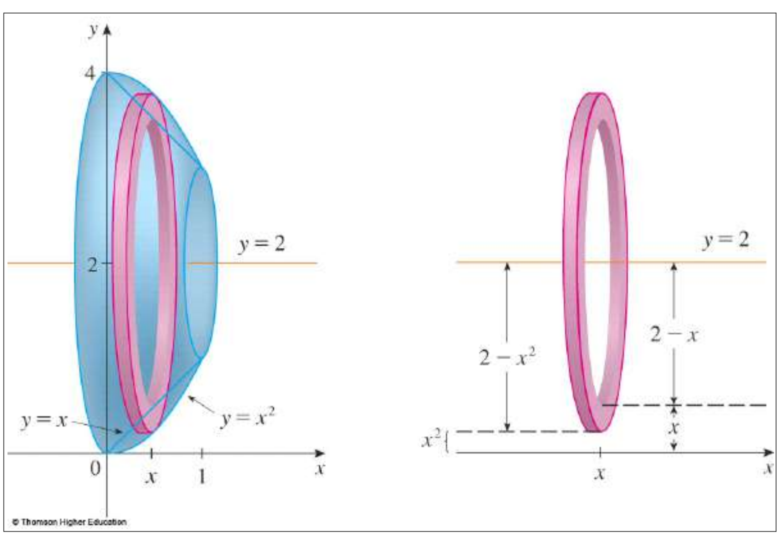
onde $R(x)$ é o raio exterior da seção em x e $r(x)$ é o raio interior da seção em x.

Ex. 6: A região delimitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = x$ e pelas retas verticais $x = 0$ e $x = 1$, gira em torno do eixo x. Determine o volume do sólido resultante:



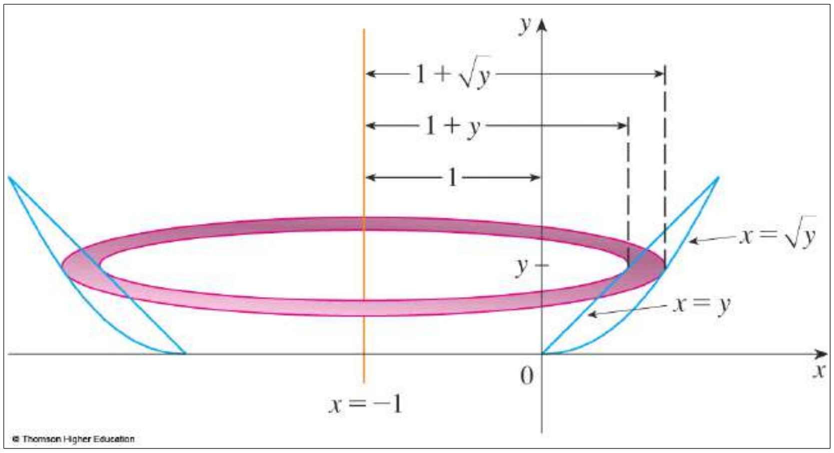
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\,dx \\ &= \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\ &= \frac{2\pi}{15} \end{aligned}$$

Ex. 7: A região delimitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = x$ e pelas retas verticais $x = 0$ e $x = 1$, gira em torno do eixo $y = 2$. Determine o volume do sólido resultante:



$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)\,dx \\ &= \pi\int_0^1 \left[\left(2 - x^2\right)^2 - (2 - x)^2\right]dx \\ &= \pi\int_0^1 \left(x^4 - 5x^2 + 4x\right)dx \\ &= \pi\left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{8\pi}{5} \end{aligned}$$

Ex. 8: A região delimitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = x$ e pelas retas verticais $x = 0$ e $x = 1$, gira em torno do eixo $x = -1$. Determine o volume do sólido resultante:



$$V = \int_0^1 A(y)dy$$
$$= \pi\int_0^1 \left[\left(1+\sqrt{y}\right)^2 - (1+y)^2\right]dy$$
$$= \pi\int_0^1 \left(2\sqrt{y} - y - y^2\right)dy$$
$$= \pi\left[\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Ex. 9: Dado o triângulo delimitado pelas retas $y = \frac{1}{4}x + 3$ e $y = -\frac{1}{4}x + 3$ de $x = 0$ até $x = 4$. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno do eixo horizontal $y = 1$. Resposta: 16π u.v.

Ex. 10: A região delimitada pelos gráficos de $x^2 = y - 2$ e $2y - x - 2 = 0$ e pelas retas verticais $x = 0$ e $x = 1$, gira em torno do eixo x. Determine o volume do sólido resultante:
Resposta: $\frac{79}{20}\pi$ u.v.

LISTA DE EXERCÍCIOS 5:

1) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região delimitada pelos gráficos de $x^2 = y - 2$ e $2y - x - 2 = 0$ e pelas retas verticais $x = 0$ e $x = 1$, girando em torno da reta $y = 3$.
Resposta: $\frac{51}{20}\pi$ u.v

2) A região do primeiro quadrante delimitada pelos gráficos de $y = \frac{1}{8}x^3$ e $y = 2x$, gira em torno do eixo y. Determine o volume do sólido resultante:
Resposta: $\frac{512}{15}\pi$ u.v.

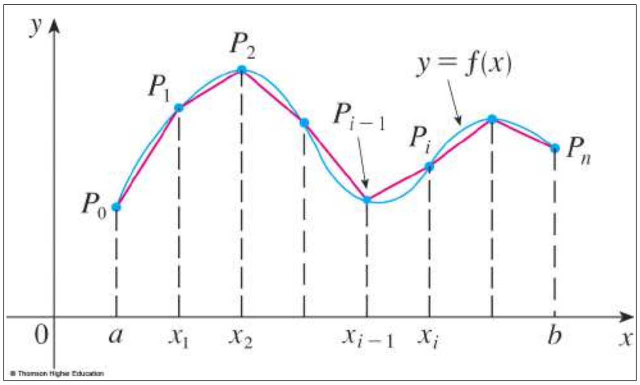
3) A região delimitada pelos gráficos de $x = y^2$ e $2y - x = 0$, gira em torno do eixo y. Determine o volume do sólido resultante:
Resposta: $\frac{64}{15}\pi$ u.v.

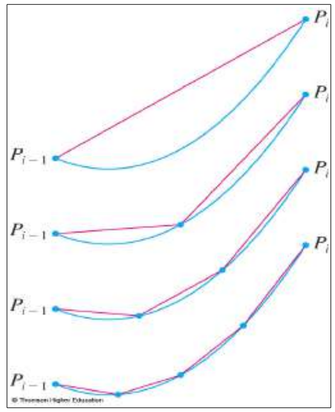
4) A região delimitada pelos gráficos de $y^2 = x$ e $y - x = -2$, gira em torno do eixo y. Determine o volume do sólido resultante: Resposta: $\frac{72}{5}\pi$ u.v.

5) A região delimitada pelos gráficos de $x = y$ e $y + x = 4$, gira em torno do eixo x. Determine o volume do sólido resultante:
Resposta: 16π u.v.

6) Estabeleça uma integral que permita achar o volume do sólido gerado pela revolução da função $x + 2y = 4$ no primeiro quadrante, girando em torno da reta:
a) $y = -2$ Resp.: $\frac{64}{3}\pi$ u.v.
b) $y = 5$ Resp.: $\frac{248}{3}\pi$ u.v.
c) $x = 7$ Resp.: $\frac{136}{3}\pi$ u.v.
d) $x = -4$ Resp.: $\frac{128}{3}\pi$ u.v.

Comprimento de arco





$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

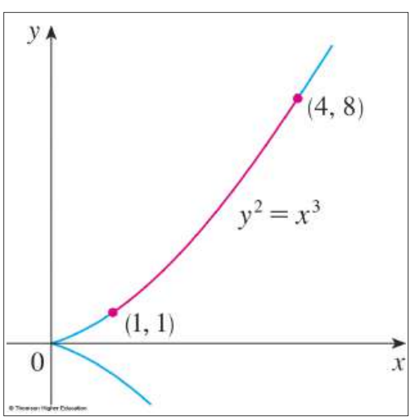
$$\Delta y_i = f'(x_i^*)\Delta x$$

$$\begin{aligned}|P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x)^2 + \left[f'(x_i^*)\Delta x\right]^2} \\ &= \sqrt{1 + \left[f'(x_i^*)\right]^2}\sqrt{(\Delta x)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left[f'(x_i^*)\right]^2}\,\Delta x \qquad (\text{since } \Delta x > 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f'(x_i^*)\right]^2}\,\Delta x\end{aligned}$$

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Exercício: Calcule o comprimento da curva marcada no gráfico.



$$y = x^{3/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{3}{2}x^{1/2}$$

$$L\int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\,dx$$

$$\begin{aligned}L &= \tfrac{4}{9}\int_{13/4}^{10} \sqrt{u}\,du \\ &= \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_{13/4}^{10} \\ &= \tfrac{8}{27}\left[10^{3/2} - \left(\tfrac{13}{4}\right)^{3/2}\right] \\ &= \tfrac{1}{27}\left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\right)\end{aligned}$$

Função Comprimento de curva

Exemplo: Se $f'(x) = x^2 - \frac{1}{8}lnx$, então

$$1+[f'(x)]^2 = 1+\left(2x-\frac{1}{8x}\right)^2 = 1+4x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{64x^2}$$
$$= 4x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{64x^2}$$
$$= \left(2x+\frac{1}{8x}\right)^2$$

$$s(x) = \int_1^x \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt$$
$$= \int_1^x \left(2t-\frac{1}{8t}\right)dt$$
$$= t^2+\tfrac{1}{8}\ln t\Big]_1^x$$
$$= x^2+\tfrac{1}{8}\ln x-1$$

Para a curva, de (1, 1) até (3, f(3)) temos:

$$s(3) = 3^2+\tfrac{1}{8}\ln 3-1$$
$$= 8+\frac{\ln 3}{8}$$
$$\approx 8.1373$$

Exercícios:
Ache o comprimento das curva

1) $y = 1+6x^{\frac{3}{2}},\ 0 \le x \le 1.$ resposta $\frac{2}{243}(82\sqrt{82}-1)$

2) $y^2 = 4(x+4)^3,\ 0 \le x \le 2.$ resposta $\frac{2}{27}(55\sqrt{55}-37\sqrt{37})$

2) $y = \frac{x^5}{6}+\frac{1}{10x^3},\ 1 \le x \le 2.$ resposta $\frac{1261}{240}$

3) $y = \frac{x^2}{2}-\frac{\ln x}{4},\ 2 \le x \le 4.$ resposta $6+\frac{\ln 2}{4}$

4) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(x-3),\ 1 \le x \le 9.$ resposta $\frac{32}{3}$

Integração por partes (**Seção 7.1 pág. 471**)

Nesta seção aprenderemos como integrar funções complexas por partes. Cada regra de derivação tem outra correspondente de integração Por exemplo, a Regra de Substituição para a integração corresponde à Regra da Cadeia para a derivação. Aquela que corresponde à Regra do Produto para a derivação é chamada integração por partes.

A Regrado Produto afirma que se $f(x)$ e $g(x)$ são funções deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x)+g(x)f'(x) \quad \Rightarrow \quad \int [f(x)g'(x)+g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x)$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx+\int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x) \quad \Rightarrow \quad \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)\,dx$$

Seja $u = f(x)$ e $v = g(x)$. Então, as diferenciais são $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$

Assim, pela Regra da substituição, a fórmula da integração por partes torna-se

$$\int u\,dv = uv-\int v\,du$$

Exemplo 1. Encontre $\int xsen(x)dx$

$$\int x\sin x\,dx = \int \overbrace{x}^{u}\overbrace{\sin x\,dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v}\overbrace{dx}^{du}$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

É interessante verificar a resposta, derivando-a. Se fizermos isso, obteremos *xsenx*, como esperado.

Se tivéssemos escolhido $u = sinx$ e $dv = xdx$, então $du = cosxdx$ e $v = x2/2$, teríamos

$$\int x\sin x\,dx = (\sin x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cos dx$$

Embora isso seja verdadeiro, $\int x^2 \cos xdx$ é uma integral mais difícil que a anterior.

OBSERVAÇÃO

Em geral, ao decidir sobre uma escolha para u e dv, geralmente tentamos escolher u como uma função que se torna mais simples quando derivada. ou ao menos não mais complicada. Contanto que dv possa ser prontamente integrada para fornecer v.

Exemplo 2. Calcule $\int lnxdx$

Não temos muitas escolhas para u e dv. Seja $u = \ln x$, $dv = dx$. Então, $du = \frac{1}{x}dx$, $v = x$. Integrando por partes, temos:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x}$$
$$= x\ln x - \int dx$$
$$= x\ln x - x + C$$

A integração por partes é eficaz nesse exemplo porque a derivada da função$f(x) = lnx$ é mais simples que f.

Exemplo 3. Calcule $\int t^2 e^t dt$.

Note que t^2 se torna mais simples quando derivada. Enquanto, e^t permanece inalterada.

$$u = t^2 \quad dv = e^t dt \quad \Rightarrow \quad du = 2t\,dt \quad v = e^t \quad \Rightarrow \quad \int t^2 e^t dt = t^2 e^t - 2\int te^t dt$$

A integral que obtivemos , $\int te^t dt$, É mais simples que a integral original, mas ainda não é óbvia. Portanto, usamos integração por partes mais uma vez. Escolhendo $u = t$, $dv = e^t dt$ e $du = dt$, $v = e^t$.

$$\int te^t dt = te^t - \int e^t dt - te^t - e^t + C$$

Substituindo na equação original, temos

$$\int t^2 e^t dt = t^2 e^t - 2\int te^t dt$$
$$= t^2 e^t - 2(te^t - e^t + C)$$
$$= t^2 e^t - 2te^t - 2e^t + C_1$$

onde $C1 = -2C$.

Exemplo 4: Calcule $\int e^x senxdx$.

Tentamos escolher $u = e^x$ e $dv = sinx$. Então $du = e^x dx$ e $v = -\cos x$.

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

Mas $\int e^x \cos x dx$ não é mais simples que a integral original. Tentamos integrar novamente. Desta vez usaremos $u = e^x$ e $dv = \cos x dx$, então, $du = e^x dx$ e $v = -senx$, e

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

Substituindo na equação original temos

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$
$$-\int e^x \sin x\,dx$$

Somando $\int e^x senxdx$, nos dois lados da equação obtemos:

$$2\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

Dividindo toda equação por dois:

$$\int e^x \sin x\,dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

INTEGRAIS DEFINIDAS

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$

LISTA DE EXERCÍCIOS 6:

Calcule a integral de:

1) $\int xe^x dx$. Resp.: $xe^x - e^x + C$

2) $\int xe^{2x} dx$ R.: $\frac{e^{2x}}{4}(2x - 1) + C$

3) $\int xe^{x^2} dx$ R.: $\frac{1}{2} e^{x^2} + C$

4) $\int xe^{-2x} dx$ R.: $-\frac{1}{4e^{2x}}(2x + 1) + C$

5) $\int x^3 e^x dx$ R.: $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$

6) $\int x^2 \ln x dx$. Resp.: $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$

7) $\int x^3 \ln x dx$ R.: $\frac{x^4}{16}(4\ln x - 1) + C$

8) $\int (\ln x)^2 dx$ R.: $x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$

9) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ R.: $\frac{(\ln x)^3}{3} + C$

10) $\int e^x \cos 2x dx$. Resp.: $\frac{1}{5} e^x \cos 2x + \frac{2}{5} e^x \sin 2x + C$

11) Resolva os exercícios numero 3 ao 30 da seção 7.1 página 476 do livro texto.

Calcule as integrais		Respostas dos exercícios ímpares
3. $\int x \cos 5x\, dx$	**4.** $\int xe^{-x}\, dx$	
5. $\int re^{r/2}\, dr$	**6.** $\int t \sin 2t\, dt$	
7. $\int x^2 \sin \pi x\, dx$	**8.** $\int x^2 \cos mx\, dx$	
9. $\int \ln(2x+1)\, dx$	**10.** $\int \sin^{-1}x\, dx$	
11. $\int \arctan 4t\, dt$	**12.** $\int p^5 \ln p\, dp$	**1.** $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$ **3.** $\frac{1}{5}x \sin 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C$
13. $\int (\ln x)^2\, dx$	**14.** $\int t^3 e^t\, dt$	**5.** $2(r-2)e^{r/2} + C$
15. $\int e^{2\theta} \sin 3\theta\, d\theta$	**16.** $\int e^{-\theta}\cos 2\theta\, d\theta$	**7.** $-\frac{1}{\pi}x^2 \cos \pi x + \frac{2}{\pi^2}x \sin \pi x + \frac{2}{\pi^3}\cos \pi x + C$ **9.** $\frac{1}{2}(2x+1)\ln(2x+1) - x + C$
17. $\int y \sinh y\, dy$	**18.** $\int y \cosh ay\, dy$	**11.** $t \arctan 4t - \frac{1}{8}\ln(1+16t^2) + C$ **13.** $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$ **15.** $\frac{1}{13}e^{2\theta}(2\sin 3\theta - 3\cos 3\theta) + C$
19. $\int_0^{\pi} t \sin 3t\, dt$	**20.** $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\, dx$	**17.** $y\cosh y - \sinh y + C$ **19.** $\pi/3$ **21.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$ **23.** $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}$
21. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\, dx$	**22.** $\int_1^4 \sqrt{t}\ln t\, dt$	**25.** $(\pi + 6 - 3\sqrt{3})/6$ **27.** $\sin x(\ln \sin x - 1) + C$ **29.** $\frac{1}{2}x(\cos \ln x + \sin \ln x) + C$ **31.** $\frac{32}{5}(\ln 2)^2 - \frac{64}{25}\ln 2 + \frac{62}{125}$ **33.** $2(\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}) + C$ **35.** $-\frac{1}{2} - \pi/4$

Integral Trigonométrica 7.2 (pág. 478)

Exemplo1: Calcule $\int cos^3 x dx$

A simples substituição $u = \cos x$ não ajuda, porque assim temos $du = -senxdx$? Logo, para integrar potências de cosseno, necessitamos de um fator extra $senx$. Analogamente, uma potência de seno precisa de um fator extra $cosx$. Dessa forma, podemos separar um fator cosseno e converter o fator $cos^2 x$ restante em uma expressão envolvendo o seno usando a identidade $sen^2x + \cos^2 x = 1$: $\cos^3 x = \cos^2 x . \cos x = (1 - sen^2 x)\cos x$. Podemos então calcular a integral substituindo $u = senx$, de modo que, $du = \cos x dx$ e

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\, dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx \\ &= \int (1-\sin^2 x)\cos x\, dx \\ &= \int (1-u^2)du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C \\ &= \sin x - \tfrac{1}{3}\sin^3 x + C\end{aligned}$$

Exemplo 2: Calcule $\int sen^5 x \cos^2 x dx$

Poderíamos converter $\cos^2 x$ para $1 - sen^2 x$. Mas ficaríamos com uma expressão em termos de $senx$ sem um fator extra $\cos x$. Em vez disso, separamos um único fator de seno e reescrevemos o fator $sin^4 x$ restante em termos de $\cos x$. Então, temos:

$$\begin{aligned}\sin^5 x \cos^2 x &= (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x \\ &= (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x\end{aligned}$$

Substituindo $u = cosx$, nos temos $du = sinxdx$. Assim

$$\int \sin^5 x \cos^2 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x\,dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x\,dx = \int (1-u^2)^2 u^2 (-du)$$
$$= -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)du = -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C$$
$$= -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C$$

Nos exemplos anteriores, uma potência ímpar de seno ou cosseno nos permitiu separar um único fator e converter a potência par remanescente. Se um integrando contém potências pares tanto para seno como para cosseno, essa estratégia falha.Nesse caso, podemos aproveitar as identidades dos ângulos-metade. $sen^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ e $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

Exemplo 3: Calcule $\int_0^\pi sen^2 x dx$.
Se escrevermos $sin^2 x = (1-\cos^2 x)$, a integral não é mais simples de calcular. Usando a fórmula do ângulo-metade para $sin^2 x$, temos:

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\,dx$$
$$= \left[\tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{2}\sin 2x)\right]_0^\pi$$
$$= \tfrac{1}{2}(\pi - \tfrac{1}{2}\sin 2\pi) - \tfrac{1}{2}(0 - \tfrac{1}{2}\sin 0)$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi$$

Observe que mentalmente fizemos a substituição $u = 2x$ quando integramos $cos 2x$.
Exemplo 4. Calcule $\int sen^4 x dx$

$$\int \sin^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2 dx$$
$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \tfrac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx$$

usando:

$$\cos^2 2x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 4x)$$

$$\int \sin^4 x\,dx = \tfrac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}(1+\cos 4x)\right] dx$$
$$= \tfrac{1}{4}\int \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$
$$= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{2}x - \sin 2x + \tfrac{1}{8}\sin 4x\right) + C$$

Podemos usar uma estratégia semelhante para avaliar integrais da forma $\int tan^m x sec^n x dx$. Caso n seja par, como $\frac{d}{dx} tanx = sec^2 x$, podemos separar um fator $sec^2 x$. Em seguida, converter o restante usando a identidade $sec^2 x = 1 + tan^2 x$ e usar $u = \tan x$.

Exemplo 5: Calcule $\int \tan^6 x \sec^4 x dx$.

$$\begin{aligned}\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx &= \int \tan^6 x \ \sec^2 x \ \sec^2 x\, dx \\ &= \int \tan^6 x (1+\tan^2 x) \sec^2 x\, dx \\ &= \int u^6 (1+u^2)\, du = \int (u^6+u^8)\, du \\ &= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C \\ &= \tfrac{1}{7}\tan^7 x + \tfrac{1}{9}\tan^9 x + C\end{aligned}$$

Alternativamente (m ímpar), como $\frac{d}{dx} secx = secxtanx$, podemos separar um fator $secxtanx$ e converter o restante usando a identidade anterior e $u = \sec x$.

Exemplo 6: Calcule $\int \tan^5 x \sec^7 x dx$.

$$\begin{aligned}\int \tan^5 \theta \sec^7 \theta &= \int \tan^4 \theta \sec^6 \theta \sec\theta \tan\theta\, d\theta \\ &= \int (\sec^2\theta - 1)^2 \sec^6 \theta \sec\theta \tan\theta\, d\theta \\ &= \int (u^2-1)^2 u^6 du = \int (u^{10} - 2u^8 + u^6)\, du \\ &= \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C \\ &= \tfrac{1}{11}\sec^{11}\theta - \tfrac{2}{9}\sec^9\theta + \tfrac{1}{7}\sec^7\theta + C\end{aligned}$$

LISTA DE EXERCÍCIOS 7:
Resolva as integrais número 1 ao 18 da página 484.

1. $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$
2. $\int \sin^6 x \cos^3 x \, dx$
3. $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin^5 x \cos^3 x \, dx$
4. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \, dx$
5. $\int \cos^5 x \sin^4 x \, dx$
6. $\int \sin^3(mx) \, dx$
7. $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta$
8. $\int_0^{\pi/2} \sin^2(2\theta) \, d\theta$
9. $\int_0^{\pi} \sin^4(3t) \, dt$
10. $\int_0^{\pi} \cos^6\theta \, d\theta$
11. $\int (1 + \cos\theta)^2 \, d\theta$
12. $\int x \cos^2 x \, dx$
13. $\int_0^{\pi/4} \sin^4 x \cos^2 x \, dx$
14. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x \, dx$
15. $\int \sin^3 x \sqrt{\cos x} \, dx$
16. $\int \cos\theta \cos^5(\sin\theta) \, d\theta$
17. $\int \cos^2 x \tan^3 x \, dx$
18. $\int \cot^5\theta \sin^4\theta \, d\theta$
19. $\int \frac{1 - \sin x}{\cos x} \, dx$
20. $\int \cos^2 x \sin 2x \, dx$
21. $\int \sec^2 x \tan x \, dx$
22. $\int_0^{\pi/2} \sec^4(t/2) \, dt$
23. $\int \tan^2 x \, dx$
24. $\int \tan^4 x \, dx$
25. $\int \sec^6 t \, dt$
26. $\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta \tan^4\theta \, d\theta$
27. $\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^4 x \, dx$
28. $\int \tan^3(2x) \sec^5(2x) \, dx$
29. $\int \tan^3 x \sec x \, dx$
30. $\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^6 x \, dx$

Respostas ímpares

1. $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$ **3.** $-\frac{11}{384}$
5. $\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C$ **7.** $\pi/4$ **9.** $3\pi/8$
11. $\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + C$ **13.** $(3\pi - 4)/192$
15. $\left(\frac{2}{7}\cos^3 x - \frac{2}{3}\cos x\right)\sqrt{\cos x} + C$
17. $\frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + C$ **19.** $\ln(1 + \sin x) + C$
21. $\frac{1}{2}\tan^2 x + C$ **23.** $\tan x - x + C$
25. $\frac{1}{5}\tan^5 t + \frac{2}{3}\tan^3 t + \tan t + C$ **27.** $\frac{117}{8}$
29. $\frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$

7.4 Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Nesta seção mostraremos como integrar qualquer função racional (um quocientede polinômios) expressando-a como uma soma de frações mais simples, chama das frações parciais, que já sabemos como integrar. Para ilustrar o método, observe que, levando as frações $2/(x-1)$ e $1/(x-2)$ a um denominador comum, obtemos:

$$\frac{2}{x-1} = \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$
$$= \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Se revertermos o procedimento, veremos como integrar a função no lado direito dessa equação:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx = \int\left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

Para ver como esse método de frações parciais funciona em geral, consideramos a função racional

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ onde P e Q são polinômios.

É possível expressar f como uma soma de frações mais simples, desde que o grau de P seja menor que o graude Q. Essa função racional é denominada própria.
Se f e impropria, isto e, $grau(P) \geq grau(Q)$, entao devemos fazer uma etapa preliminar dividindo P por Q (pordivisaode polinomios). Até o resto $R(x)$ ser obtido, com $grau(R) < grau(Q)$. O resultado da divisão é

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ onde S e R são polinômios também.

Exemplo 1. Encontre $\int \frac{x^3+x}{x-1}dx$

Como o grau do numerador é maior que o grau do denominador, primeiro devemos fazer a divisão. Isso nos permite escrever:

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}dx = \int\left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-1| + C$$

A próxima etapa é fatorar o denominador $Q(x)$ o máximo possível. É possível demonstrar que qualquer polinômio Q pode ser fatorado como um produtode fatores lineares (da forma $ax+b$) e fatores quadráticos irredutíveis (da forma ax^2+bx+c, onde $b^2-4ac < 0$). Por exemplo, se $Q(x) = x^4 - 16$, poderíamosfatorá-lo como:

$$Q(x) = (x^2-4)(x^2+4)$$
$$= (x-2)(x+2)(x^2+4)$$

A terceira etapa é expressar a função racional própria $R(x)/Q(x)$ como uma soma de frações parciais da forma: $\frac{A}{(ax+b)^i}$ ou $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}$.

Um teorema na álgebra garante que é sempre possível fazer isso. Explicamos os detalhes para os quatro casos que ocorrem.

CASO 1

O denominador Q(x) é um produto de fatores lineares distintos. Isso significa que podemos escrever. $Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\ldots(a_kx + b_k)$ onde nenhum fator é repetido (e nenhum fator é múltiplo constante do outro). Nesse caso o teorema das frações parciais afirma que existem constantes A1, A2, . . . , Ak talque:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

Essas constantes podem ser determinadas como no exemplo seguinte.

Exemplo 2. Calcule

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$$

Como o grau do numerador é menor que o grau do denominador, não precisamos dividir. Fatoramos o denominador como:

$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = 2x(x - 1/2)(x + 2) = x(2x - 1)(x + 2)$

Como o denominador tem três fatores lineares distintos.

A decomposição em frações parciais do integrando tem a forma:

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}$$

Para determinar os valores de A, B e C multiplicamos ambos os lados dessa equação pelo produto dos denominadores, $x(2x1)(x + 2)$, obtendo:

$x^2 + 2x + 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$

Expandindo o lado direito da Equação e escrevendo-a na forma-padrão para os polinômios, temos:

$x^2 + 2x + 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2BC) - 2A$

Isso resulta no seguinte sistema de equações para A, B e C:

$2A + B + 2C = 1$	$A = \frac{1}{2}$
$3A + 2BC = 2$	$B = 1/5$
$3A + 2BC = 2$	$C = 1/10$

E assim,

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{10}\ln|2x-1| - \tfrac{1}{10}|x+2| + K$$

CASO 2

$Q(x)$ é um produtode fatores lineares, e alguns dos fatores são repetidos. Suponha que o primeiro fator linear $(a_1x + b_1)$ seja repetido r vezes. Isto é, $(a_1x + b_1)^r$ ocorre na fatoração de $Q(x)$. Então, em vez de um único termo $A_1/(a_1x + b_1)$, usaríamos.

$$\frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x+b_1)^r}$$

Para ilustrar, poderíamos escrever.

$$\frac{x^3-x+1}{x^2(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{(x-1)^3}$$

Exemplo 4. Encontre

$$\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx$$

A primeira etapa é dividir. O resultado da divisão de polinômios é:

$$\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}$$
$$=x+1+\frac{4x}{x^3-x^2-x+1}$$

A segunda etapa é fatorar o denominador
$Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.
Como $Q(1) = 0$, sabemos que $x - 1$ é um fator e obtemos:

$$\begin{aligned} x^3-x^2-x+1 &= (x-1)(x^2-1) \\ &= (x-1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

Como o fatorl inear $x - 1$ ocorre duas vezes, a decomposição em frações parciais é:

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

Multiplicando pelo mínimo denominador comum, $(x - 1)^2(x + 1)$, temos:

$$\begin{aligned} 4x &= A(x-1)(x+1)+B(x+1)+C(x-1)^2 \\ &= (A+C)x^2+(B-2C)x+(-A+B+C) \end{aligned}$$

Agora igualamos os coeficientes:

$$\begin{aligned} A+C&=0 \\ B-2C&=4 \\ -A+B+C&=0 \end{aligned}$$

Resolvendo, obtemos:
A = 1, B = 2, C = -1.
Assim

$$\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$$
$$=\int \left[x+1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+1} \right]dx$$
$$=\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\ln|x+1|+K$$
$$=\frac{x^2}{2}+x-\frac{2}{x-1}+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+K$$

CASO 3

$Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis, nenhum dos quais se repete. Se $Q(x)$ tem o fator ax^2+bx+c, onde $b^2-4ac<0$, então, além das frações parciais, a expressão para $R(x)/Q(x)$ terá um termo daforma

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

em que A e B são as constantes a serem determinadas.

Exemplo 5. Calcule

$$\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx$$

Como $x^3+4x = x(x^2+4)$ não pode ser mais fatorado, escrevemos:

$$\frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

Multiplicando por $x(x^2+4)$, temos:

$$2x^2-x+4=A(x^2+4)+(Bx+C)x$$
$$=(A+B)x^2+Cx+4A$$

Igualando os coeficientes, obtemos:

A + B = 2, C = 1, 4A = 4. Então, A = 1, B = 1, e C = 1. Logo

$$\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}\right)dx$$

Para integrar o segundo termo, o dividimos em duas partes:

$$\int \frac{x-1}{x^2+4}dx=\int \frac{x}{x^2+4}dx-\int \frac{1}{x^2+4}dx$$

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)} dx$$
$$= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2+4} dx - \int \frac{1}{x^2+4} dx$$
$$= \ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+4) - \tfrac{1}{2}\tan^{-1}(x/2) + K$$

CASO 4
$Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos. Se $Q(x)$ tem um fator $(ax^2 + bx + c)^r$ onde $b^2 - 4ac < 0$. Então, em vez de uma única fração parcial, a soma

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_r x + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

ocorre na decomposição em frações parciais de $R(x)/Q(x)$.
Cada um dos termos pode ser integrado primeiro completando o quadrado.

Exemplo 6. Calcule

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} dx$$

A forma da decomposição em frações parciais é:

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 1)^2$, temos:

$$-x^3 + 2x^2 - x + 1$$
$$= A(x^2+1)^2 + (Bx + C)x(x^2+1) + (Dx + E)x$$
$$= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex$$
$$= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A$$

$$A + B = 0$$
$$C = -1$$
$$2A + B + D = 2$$
$$C + E = -1$$
$$A = 1$$

Que tem a solução $A = 1, B = -1, C = -1, D = 1, E = 0$.Então,

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx$$
$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$$
$$= \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tan^{-1} x - \frac{1}{2(x^2+1)^2} + K$$

O algoritmo de Briot-Ruffini

O algoritmo de Briot-Rufini é um dispositivo prático para efetuar a divisão de um polinômio f de grau $n \geq 1$ por um polinômio do tipo $(x - u)$. Para facilitar representamos f e o quociente q na forma

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$
$$q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

em vez de usar a forma padrão.

Assim, se o resto for indicado por r, tem-se a seguinte igualdade:

$$f(x) = (x - u)q(x) + r$$
$$f(x) = (x - u)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + r$$
$$f(x) = b_0x^n + (b_1 - u)x^{n-1} + \ldots + (b_{n-1} - ub_{n-2})x + (r - ub_{n-1}).$$

Pelo principio de identidade de polinômios:

$$b_0 = a_0,\ b_1 = ub_0 + a_1, \ldots, b_{n-1} = ub_{n-2} + a_{n-1},\ r = ub_{n-1} + a_n.$$

O quociente e o resto podem então ser obtidos mediande o dispositivo abaixo

a_0	a_1	...	a_{n-1}	a_n	u
	ub_0	...	ub_{n-2}	ub_{n-1}	
$b_0 = a_0$	$b_1 = ub_0 + a_1$	...	$b_{n-1} = ub_{n-2} + a_{n-1}$	$r = ub_{n-1} + a_n$	

Proposição: Seja f um polinômio sobre $Z[x]$. Se um número racional $u = \frac{r}{s}$ é raiz de f, então $r \mid a_0$ (r divide a_0) e $s \mid a_n$ (s divide a_n).

Corolário 1: Se um número inteiro r é raiz de um polinômio sobre $Z[x]$, então r é um divisor de a_0.
Corolário 2: As eventuais é raízes racionais de um polinômio sobre $Z[x]$ são números inteiros divisores de a_0.

Exemplo:
1) O polinômio $f(x) = 2 + x + x^2$ não tem raízes racionais. De fato, se as tivesse, elas seriam números inteiros divisores de 2, que são $\pm 1, \pm 2$. como $f(1) = 4$, $f(-1) = 2$, $f(2) = 8$ e $f(-2) = 4$, então f não tem raízes racionais.

Lista de Exercícios 8

Exercícios 7 ao 30 da página 500 seção 7.4
Resolva as seguintes integrais usando frações parciais

7. $\int \frac{x}{x-6}\,dx$

8. $\int \frac{r^2}{r+4}\,dr$

9. $\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}\,dx$

10. $\int \frac{1}{(t+4)(t-1)}\,dt$

11. $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx$

12. $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+3x+2}\,dx$

13. $\int \frac{ax}{x^2-bx}\,dx$

14. $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx$

15. $\int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)^2}\,dx$

16. $\int_0^1 \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6}\,dx$

17. $\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}\,dy$

18. $\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx$

19. $\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)}\,dx$

20. $\int \frac{x^2}{(x-3)(x+2)^2}\,dx$

21. $\int \frac{5x^2+3x-2}{x^3+2x^2}\,dx$

22. $\int \frac{ds}{s^2(s-1)^2}$

23. $\int \frac{x^2}{(x+1)^3}\,dx$

24. $\int \frac{x^3}{(x+1)^3}\,dx$

25. $\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}\,dx$

26. $\int \frac{x^2-x+6}{x^3+3x}\,dx$

27. $\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

28. $\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

29. $\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx$

30. $\int \frac{x^3-2x^2+x+1}{x^4+5x^2+4}\,dx$

Respostas

7. $x + 6\ln|x-6| + C$

9. $2\ln|x+5| - \ln|x-2| + C$

11. $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

13. $a\ln|x-b| + C$

15. $2\ln 2 + \frac{1}{2}$

17. $\frac{27}{5}\ln 2 - \frac{9}{5}\ln 3$ $\left(\text{or } \frac{9}{5}\ln\frac{8}{3}\right)$

19. $-\frac{1}{36}\ln|x+5| + \frac{1}{6}\frac{1}{x+5} + \frac{1}{36}\ln|x-1| + C$

21. $2\ln|x| + 3\ln|x+2| + (1/x) + C$

23. $\ln|x+1| + 2/(x+1) - 1/[2(x+1)^2] + C$

25. $\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+9) - \frac{1}{3}\tan^{-1}(x/3) + C$

27. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + (1/\sqrt{2})\tan^{-1}(x/\sqrt{2}) + C$

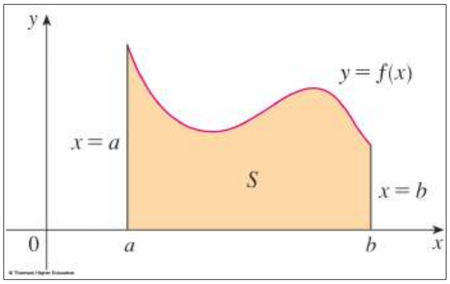
29. $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\tan^{-1}((x+1)/2) + C$

Integrais Impróprias

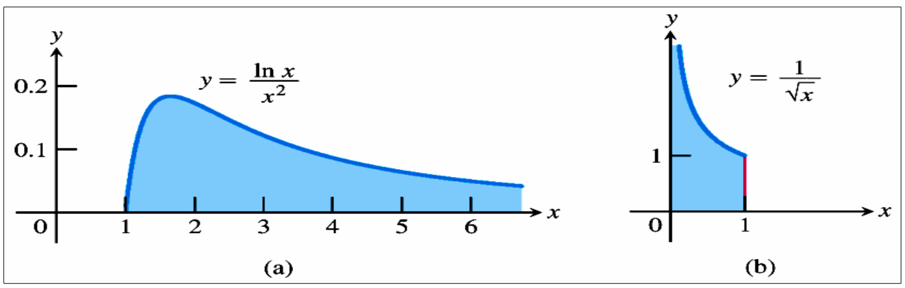
A existência da integral definida

$$\int_a^b f(x)dx$$

com a função $f(x)$ sendo Contínua no intervalo fechado [a, b], nos foi garantida pelo Teorema fundamental do Cálculo.



Entretanto, determinadas aplicações do Cálculo nos levam à formulações de integrais em que
a) o intervalo de integração não é limitado (infinito) ou
b) o integrando tem uma descontinuidade infinita em algum ponto do intervalo [a, b];

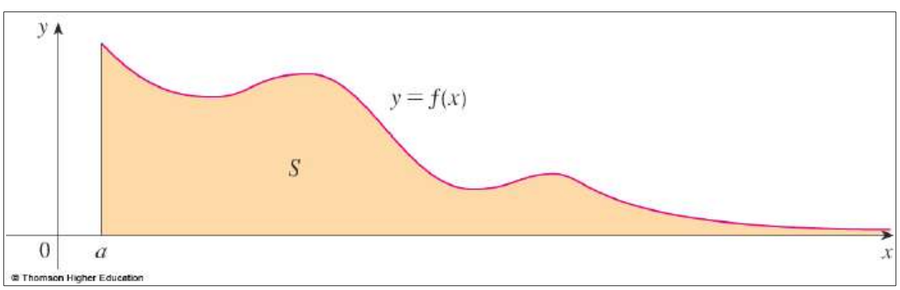


Nosso objetivo é definir o conceito de integrais deste tipo, chamadas de Integrais Impróprias.

Integrais Impróprias Tipo 1: intervalos infinitos

A área da região S, abaixo da curva f(x) no intervalo [a,+8) , é calculada pela integral

$$S = \int_a^\infty f(x)dx$$



Esta área será finita ou infinita?

Exemplo 1: Vejamos um exemplo ilustrativo: Considere a integral.

$$\int_0^\infty \frac{1}{2^x} dx$$

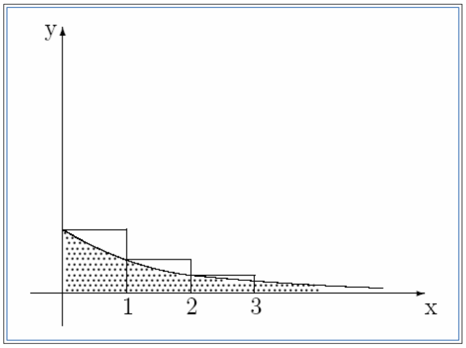
Observe na figura que a área da integra é menor que a soma das áreas dos retangulos

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2^x}\,dx < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \overset{(*)}{=} 2$$

onde em (*) usamos a soma de uma P.G.

$$S = \frac{a_1}{1-r}, \quad a_1 = 1, \quad r = \frac{1}{2}.$$

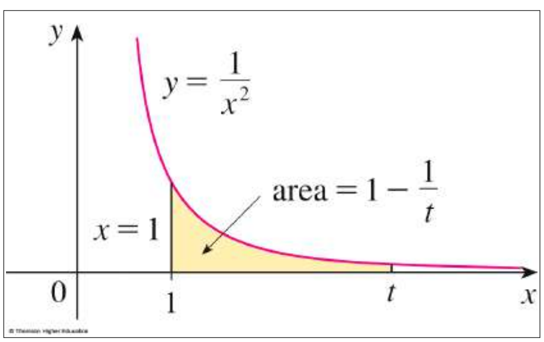
Logo a área obtida pela integral está limita por uma área finita, portanto, também será finita.



Exemplo 2: A área sombreada da figura abaixo é dada por:

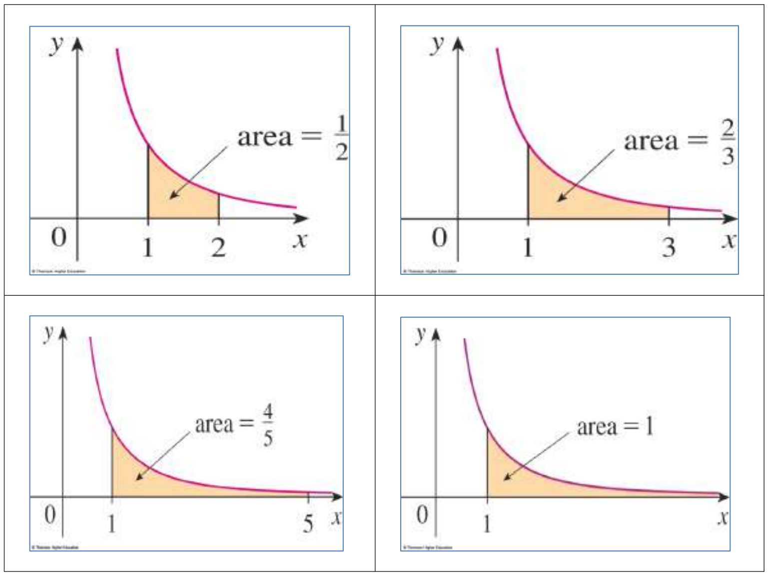
$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

Observe que a área A(t) < 1 por maior que seja t.



Também observamos que a área se aproxima de 1 quando $t \to \infty$.

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$



Assim, dizemos que a área da região infinita S é iguala 1 e escrevemos:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^{t} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

logo, definimos a integral de f(x) (não necessariamente uma função positiva) sobre um intervalo infinito como o limite das integrais sobre os intervalos finitos.

Definição 1: Integrais impróprias do tipo 1

a) Se existe $\int_a^t f(x)dx$ para todo número t = a, então:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^{t} f(x)\,dx$$

b) Se existe $\int_t^b f(x)dx$ para todo número t = b, então:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_t^{b} f(x)\,dx$$

c) a partir de a) e b), para um número real qualquer a, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

Convergência e divergência
As integrais improprias:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$
e Figure

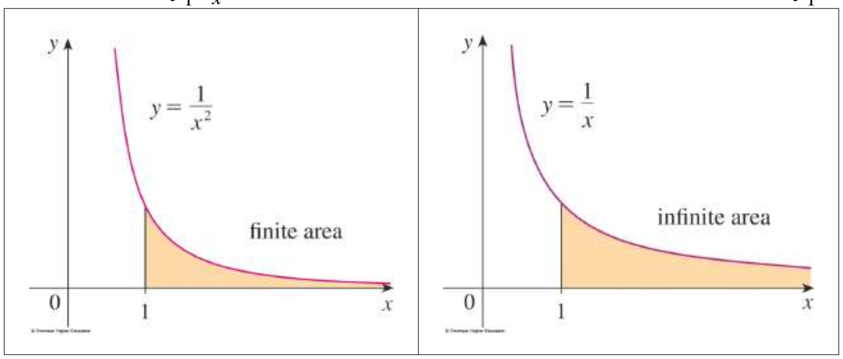
São ditas convergentes se o limite correspondente existe (como um número finito), caso contrário, são ditas divergentes.

Exemplo 3: Verifique se a integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx$ é convergente ou divergente.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x| \Big]_1^t$$
$$= \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1)$$
$$= \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$$

Observe que este limite não existe como número, portanto esta integral diverge.

Observe que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge como vimos no exemplo 2, mas $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge apesar da semelhança das funções.



Exemplo 4: calcule $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$

Solução: Usando a definição 1 b)

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x \, dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 xe^x \, dx$$

Integrando por partes com $u = x, du = 1, dv = e^x$ e $v = e^x$

$$\int_t^0 xe^x \, dx = xe^x \Big]_t^0 - \int_t^0 e^x \, dx$$
$$= -te^t - 1 + e^t$$

então

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x \, dx = \lim_{t\to-\infty} (-te^t - 1 + e^t)$$
$$= -0 - 1 + 0$$
$$= -1$$

onde

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-t}}$$
$$= \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{-e^{-t}}$$
$$= \lim_{t\to-\infty} (-e^t)$$
$$= 0$$

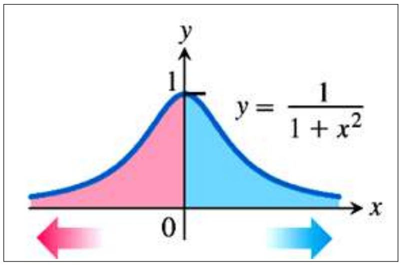
Exemplo 5: calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Solução: Usando a definição 1 c) escolhendo $a = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\,dx+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Como a integral acima pode ser interpretada como a área representada na figura:



Resolvendo separadamante cada integral, usando substituição Triginométrica

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx\\
&=\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}\frac{dx}{1+x^2}\\
&=\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}x\Big]_{0}^{t}\\
&=\lim_{t\to\infty}(\tan^{-1}t-\tan^{-1}0)\\
&=\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t\\
&=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\,dx\\
&=\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0}\frac{dx}{1+x^2}\\
&=\lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}x\Big]_{t}^{0}\\
&=\lim_{t\to-\infty}(\tan^{-1}0-\tan^{-1}t)\\
&=0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\
&=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

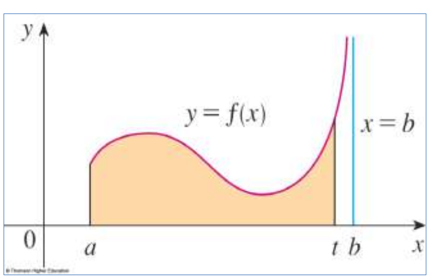
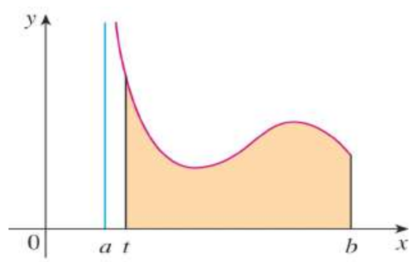
Resultando

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$, portanto convergente.

Integrais Impróprias do tipo 2: Integrando descontínuo

Definicão 2

Suponha que seja uma função positiva contínua definida no intervalo finito

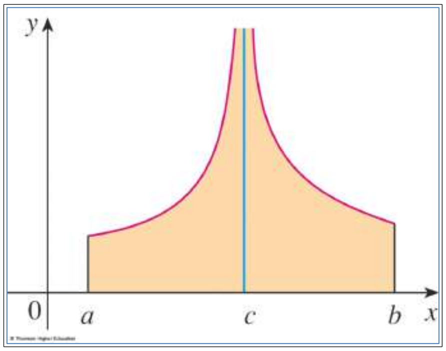
a) [a, b) com uma assíntota vertical em b	b) (a,b] com uma assíntota vertical em b
	
$\int_{a}^{b} f(x)\,dx=\lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)\,dx$	$\int_{a}^{b} f(x)\,dx=\lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)\,dx$

se estes limites existirem (como um número), a integral imprópria é dita convergente, caso contrário, a integral é divergente.

Definicão 2 c): Se f tiver uma descontinuida de em c, onde a < c < b, e as integrais

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

forem ambas convergentes, então definimos:

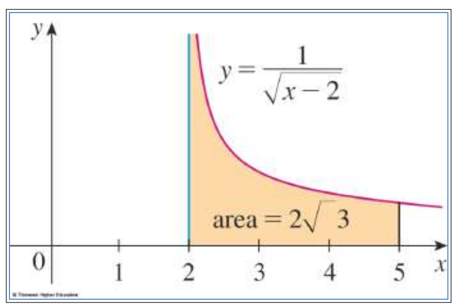


$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Exemplo 6: calcule $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$

Observamos que essa integral é imprópria, porque $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$ tem uma assíntota vertical em x = 2. Como a descontinuidade infinita ocorre no extremo esquerdo de [2, 5], usamos a Definição 2 b):

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t\to 2^+}\int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{t\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\,\Big]_t^5 \\ &= \lim_{t\to 2^+} 2(\sqrt{3}-\sqrt{t-2}) \\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$



Portanto, a integral imprópria é convergente.

Exemplo 7: calcule $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$

Observamos que essa integral é imprópria, porque f(x) tem uma assíntota vertical x = 1. Como a descontinuidade infinita ocorre no interior de [0, 3], usamos a Definição 2 c) com
c = 1:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

onde

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{dx}{x-1} &= \lim_{t\to 1^-} |x-1|\,\Big]_0^t \\ &= \lim_{t\to 1^-}(\ln|t-1| - \ln|-1|) \\ &= \lim_{t\to 1^-}\ln(1-t) = -\infty\end{aligned}$$

Observamos então que $\int_0^1 dx/(x-1)$ é divergente, Portanto $\int_0^3 dx/(x-1)$ é divergente, sendo desnecessário o calculo de $\int_1^3 dx/(x-1).$

Observação: Se não considerarmos as descontínuidades de f(x) calculando a integral diretamente pelo teorema fundamental do cálculo, teremos um resultado errôneo, por exemplo no exemplo anterior teríamos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{x-1} &= \ln|x-1|\Big]_0^3 \\ &= \ln 2 - \ln 1 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

Isto é errado, porque a integral é imprópria e deve ser calculada em termos de limite. Portanto, devemos sempre nos certificar se a integral é imprópria ou não antes de resolve-la.

.

Exemplo 8: calcule

$$\int_0^1 \ln x\,dx$$

Observamos que essa integral é imprópria, porque $f(x)$ tem uma assíntota vertical em $x = 0$, pois

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

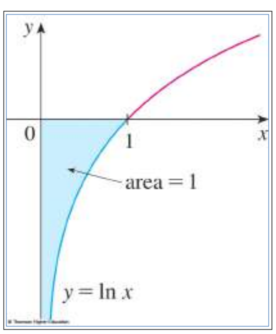
Como a descontinuidade infinita ocorre na extremidade esquerda de [0, 1], usamos a Definição 2 a)

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x\,dx$$

Integrando por partes, com $u = \ln x$, $dv = dx$, $du = dx/x$, e $v = x$:

$$\begin{aligned} \int_t^1 \ln x\,dx &= x\ln x\Big]_t^1 - \int_t^1 dx \\ &= 1\ln 1 - t\ln t - (1-t) \\ &= -t\ln t - 1 + t \end{aligned}$$

Para calcular o limite do primeiro termo, usamos a regra de LHospital da seguinte forma



$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} t\ln t &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} \\ &= \lim_{t\to 0^+} (-t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x\,dx &= \lim_{t\to 0^+} (-t\ln t - 1 + t) \\ &= -0 - 1 + 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Lista de Exercícios 9

Exercícios 5 ao 38 da página 532 seção 7.8

Determine se cada integral é convergente ou divergente. Avalie aquelas que são convergentes.

5. $\int_1^\infty \frac{1}{(3x+1)^2}\,dx$

6. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2x-5}\,dx$

7. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-w}}\,dw$

8. $\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx$

9. $\int_4^\infty e^{-y/2}\,dy$

10. $\int_{-\infty}^{-1} e^{-2t}\,dt$

11. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$

12. $\int_{-\infty}^\infty (2-v^4)\,dv$

13. $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,dx$

14. $\int_{-\infty}^\infty x^2e^{-x^3}\,dx$

15. $\int_{2\pi}^\infty \sin\theta\,d\theta$

16. $\int_0^\infty \cos^2\alpha\,d\alpha$

17. $\int_1^\infty \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx$

18. $\int_0^\infty \frac{dz}{z^2+3z+2}$

19. $\int_0^\infty se^{-5s}\,ds$

20. $\int_{-\infty}^6 re^{r/3}\,dr$

21. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

22. $\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\,dx$

23. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{9+x^6}\,dx$

24. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}\,dx$

25. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

26. $\int_0^\infty \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx$

27. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

28. $\int_0^3 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

29. $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx$

30. $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-9}}\,dx$

31. $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4}\,dx$

32. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

33. $\int_0^{33} (x-1)^{-1/5}\,dx$

34. $\int_0^1 \frac{1}{4y-1}\,dy$

35. $\int_0^\pi \sec x\,dx$

36. $\int_0^4 \frac{1}{x^2+x-6}\,dx$

37. $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$

38. $\int_0^2 \frac{x-3}{2x-3}\,dx$

Respostas

5. $\frac{1}{12}$ **7.** D **9.** $2e^{-2}$ **11.** D **13.** 0 **15.** D
17. D **19.** $\frac{1}{25}$ **21.** D **23.** $\pi/9$
25. 1 **27.** $2\sqrt{3}$ **29.** D **31.** D **33.** $\frac{75}{4}$
35. D **37.** D **39.** $\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9}$

SEQÜÊNCIAS E SÉRIES

Seqüências

Seqüência é uma função de N em R , em outras palavras, uma seqüência em R associa a cada número natural $n = 1, 2, \ldots,$ um único e bem determinado elemento de R. Tradicionalmente, usa-se a notação a_n ou x_n.

Exemplos de seqüências:

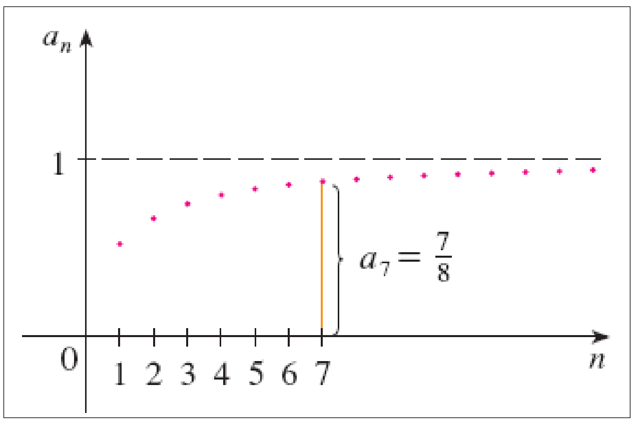
i) 1, 1/2, 1/3,..., 1/n,... ou $a_n = 1/n$ com $n = 1, 2, \ldots$

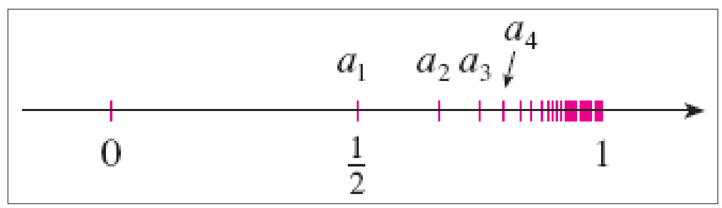
ii) 1, 3, 1/2, 3, 1/3, 3, 1/4, 3, ...

iii) 2, -2, 2, -2,...

iv) 1, 2, 3, 4, ...

v) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$





Definição 1:

Uma seqüência é dita:

i) crescente se $a_{n+1} \geq a_n$.

ii) estritamente crescente se $a_{n+1} > a_n$.

iii) decrescente se $a_{n+1} \leq a_n$.

iv) estritamente decrescente se $a_{n+1} < a_n$.

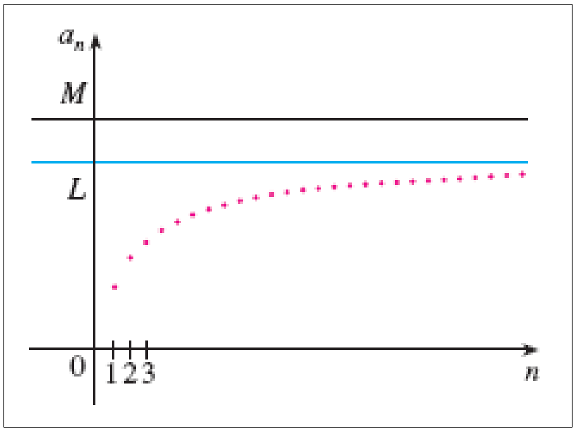
v) monótona se for de um dos tipos acima.

Exemplo 1: Escreva os cinco primeiros termos da seqüência e verifique se é monótona:

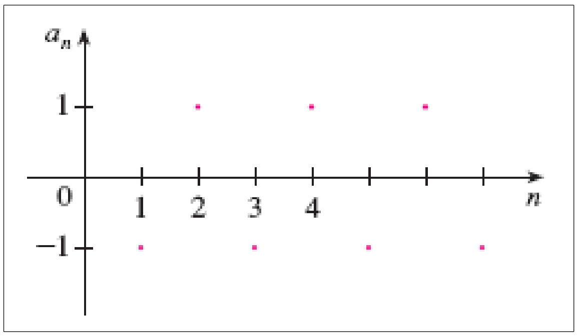
i) $a_n = 3 + (-1)^n$ ii) $b_n = \dfrac{2n}{1+n}$

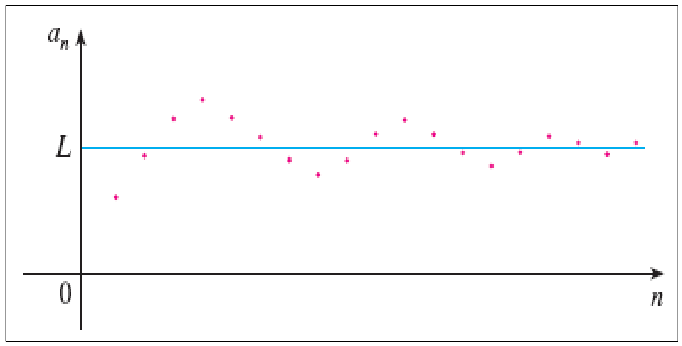
Definição 2:

i) Uma seqüência a_n é dita limitada se $|a_n| \leq M \in R,$ para todo $n \in N$.



ii) Uma seqüência pode ser divergente (para infinito), oscilante ou converge para um valor $l \in R$.





Teorema 1:Toda seqüência monótona e limitada é convergente.

Exemplo 2: Mostre que $a_n = \frac{1}{n}$ é convergente.

Definição 3: Uma seqüência a_n converge para um número real L se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Esta seqüência é chamada seqüência convergente e podemos denotar por $a_n \to L$.

Propriedades dos Limites:

Se $\lim a_n = A$ e $\lim b_n = B$, então valem as propriedades:

i) $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = A + B$

ii) $\lim(a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n = AB$

iii) $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{A}{B}$

Exemplo 3: Calcule o limite de:

i) $a_n = \frac{3n^3 - 5n}{5n^3 + 2n - 6}$. Resp.: $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{5}$.

ii) $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Resp.: $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Teorema 2: (Teste da razão para seqüências)

Se uma seqüência a_n de termos positivos satisfaz a condição $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, então a seqüência a_n converge para zero.

Exemplo 4: Use o teste da razão para determinar se a seqüência $a_n = \frac{n^p}{2^n}$ converge.

Teorema 3:Uma seqüência a_n converge para $L \Leftrightarrow$ ambas as subseqüência a_{2n} (par) e a_{2n-1} (ímpar) convergem para L.

Exemplo 5: Use o teorema 3 para mostrar que a seqüência $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Lista de Exercícios 10

1) Escreva os primeiros cinco termos das seguintes seqüências.

$a)\ a_n = 2^n,\qquad b)\ a_n = \frac{(-1)^n}{2},\qquad c)\ a_n = \frac{3^n}{n!},$

$d)\ a_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^2},\qquad e)\ a_n = \frac{2n-1}{3n+2},\qquad f)\ a_n = \frac{(-1)^{(n-1)}x^{(2n-1)}}{(2n-1)!}.$

2) Determine se as seguintes seqüências são monótonas. Justifique:

$a)\ a_n = 4 - \frac{1}{n},\qquad b)\ a_n = \frac{\cos(n)}{n},\qquad c)\ a_n = (-1)^n \frac{1}{n},$

$d)\ a_n = (\frac{2}{3})^n,\qquad e)\ a_n = sen(n\pi),\qquad f)\ a_n = \frac{n}{n^2+1}$

3) Use o teorema 1 para provar que as seguintes seqüências são convergentes. Calcule o seu limite.

$a)\ a_n = 5 + \frac{1}{n},\qquad b)\ a_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right),$

$c)\ a_n = 3 - \frac{4}{n},\qquad d)\ a_n = 4 + \frac{1}{2^n}.$

4) Determine se as seqüências convergem ou divergem e encontre o seu limite.

$a)\ a_n = \frac{n+1}{n},\qquad b)\ a_n = \frac{3n^2 - n + 4}{2n^2+1},\qquad c)\ a_n = \frac{1+(-1)^n}{n},\qquad d)\ a_n = \frac{n^2-1}{n+1},$

$e)\ a_n = \frac{3^n}{4^n},\qquad f)\ a_n = \frac{3+5n^2}{n+n^2},\qquad g)\ a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}},\qquad h)\ a_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1},$

$i)\ a_n = 6(\frac{5}{6})^n\qquad j)\ a_n = 1-n\qquad k)\ a_n = (1+\frac{1}{n})^n\qquad l)\ a_n = \sqrt[n]{n}$

Solução da Lista de Exercícios 10:

1) $a)\ a_n = 2^n = 2, 4, 8, 16, 32$

$b)\ a_n = \frac{(-1)^n}{2} = \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}$

$c)\ a_n = \frac{3^n}{n!} = 1, 3, 9/2, 9/2, 27/8, 81/40$

$d)\ a_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^2} = -1, -1/4, 1/9, 1/16, -1/25$

$e)\ a_n = \frac{2n-1}{3n+2} = 1/5, 3/8, 5/11, 1/2, 9/17$

$f)\ a_n = \frac{(-1)^{(n-1)}x^{(2n-1)}}{(2n-1)!} = x, -1/6 * x^3, 1/120 * x^5, -1/5040 * x^7, 1/362880 * x^9$

2)

$a)\ a_n = 4 - \frac{1}{n},\ a_{n+1} = 4 - \frac{1}{n+1},$

$1 \geq \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 4 - \frac{1}{n} < 4 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow a_n < a_{n+1}$

a_n é monotona estritamente crescente.

$b)\ a_n = \frac{\cos(n)}{n},$

$.5403023059, -.2080734182, -.3299974988, -.1634109052, .05673243710$

não é monotona (oscila).

$c)\ a_n = (-1)^n \frac{1}{n},\qquad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$ oscila também!

$d)\ a_n = (\frac{2}{3})^n, a_{n+1} = (\frac{2}{3})^{n+1},\quad \frac{(\frac{2}{3})^n}{(\frac{2}{3})^{n+1}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow a_n > a_{n+1}$

monótona estritamente decrescente.

$e)\ a_n = sen(n\pi),\qquad 0, 0, 0, 0, \ldots$ monótona decrescente ou crescente

$f)\ a_n = \frac{n}{n^2+1},\quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n^2+2n+2}\qquad a_{n+1} \leq a_n$, ou seja, $1 \leq n^2 + n\qquad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$

3) $a)\ 5,\qquad b)\ 1/3,\qquad c)\ 3,\qquad d)\ 4.$

4)

$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-n+4}{2n^2+1} = \frac{3}{2}$

$c)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{n} = 0 \qquad d)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n+1} = \infty$

$e)\ \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{4^n} = 0 \qquad f)\ \lim_{n\to\infty} \frac{3+5n^2}{n+n^2} = 5$

$g)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = 0 \qquad h)\ \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1} = 0$

$i)\ \lim_{n\to\infty}\left[6\left(\frac{5}{6}\right)^n\right] = 0 \qquad j)\ \lim_{n\to\infty}(1-n) = -\infty$

$k)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad l)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Séries

Aqui, serão apresentados os teoremas mais importantes da teoria de séries com relação à convergência.

Costuma-se definir uma série como uma expressão da forma $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$

Uma série pode ser:

$a)$ Finita: $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

$b)$ Infinita: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$

Formalmente, define-se uma série como: se a_n é uma seqüência, então a série gerada por a_n é a seqüência S_k, definida por:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S_{n-1} + a_n$

Se S_k converge, chamamos o limite S de soma da série. Os elementos a_n são os termos e os elementos S_n são as somas parciais da série.

Exemplo 6: Série geométrica: $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$, $|r| < 1$.

$S_1 = a$

$S_2 = a + ar$

$S_3 = a + ar + ar^2$

$\vdots$

$S_n = a + ar + \ldots + ar^{n-1}$

supondo $rS_n = ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n$, então, $S_n - rS_n = a - ar^n$, logo, $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ e:

$\lim_n S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$, já que $\lim_{n\to 0} r^n = 0$

Portanto: $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ é convergente e, ainda, $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \dfrac{a}{1-r}$ desde que $|r| < 1$.

Observação 1: Se S for infinito ou simplesmente não existir, então $S = \sum a_n$ é divergente.

Exemplo 7: Determine se as seguintes séries são convergentes ou divergentes:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

$$S_n = \begin{cases} 0, \text{ se } n \text{ é par} \\ 1, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad \therefore \lim_{n\to\infty} S_n \quad \nexists$$ logo, é divergente.

2) A série telescópica $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$:

Usando a decomposição em frações parciais, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$,

então $S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1.$

3) A série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{10^n}$:

$S_n = 0.6 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + \ldots = 0.666666\ldots = \frac{2}{3}.$

Propriedades das Séries Convergentes

Teorema 4 (**Teste do enésimo termo**): Se $\sum a_n$ converge, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Observação 2: A recíproca não é verdadeira, mas se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então $\sum a_n$ diverge.

Exemplo 8: Seja a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. O limite de $\frac{1}{n}$ é zero, mas a série diverge.

Solução:(Jacob Bernoulli 1713)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ então

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$S_4 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$

$S_8 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) = \frac{4}{2}.$

$S_{2^n} > \frac{n+1}{2}$, então $\lim_{n\to\infty} S_n > \lim_{n\to\infty} S_{2^n} > \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$, portando a série diverge.

Observação 3: O que há de harmônico sobre a série harmônica?

Os termos na série harmônica correspondem aos nós em uma corda vibrando que produzem múltiplos da freqüência fundamental. Por exemplo, 1/2 produz o harmônico que é o dobro da freqüência fundamental, 1/3 produz uma freqüência que é 3 vezes a freqüência fundamental e assim por diante. A freqüência fundamental é a nota ou a altura do som mais baixa que ouvimos quando uma corda é tangida.

Teorema 5: Critério de Leibniz (1705) para séries alternadas

Se $\{b_n\}$ é uma seqüência monótona decrescente tal que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} b_n$ converge .

Exemplo 9: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge?

Solução: $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ $\quad \Rightarrow a_{n+1} < a_n$ (seqüência monótona decrescente) e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, portanto, pelo critério de Leibniz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

Lista de Exercícios 11

1) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ converge e ache a sua soma.

2) Mostre que a série cujo enésimo termo é $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ diverge, embora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

3) Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ diverge.

4) Use o Critério de Leibniz para verificar a convergência das seguintes séries.

$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}, \qquad c)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$

5) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n+4}}$ converge e encontre sua soma.

6) Determine se as séries abaixo convergem ou divergem:

$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{9^n}$ $b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n-1} - \frac{6}{4n+3}$ $c)\ \sum_{n=0}^{\infty} 4^n e^{-2n}$

$d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{4^{n+3}}$ $e)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{9^{n+1}}$ $f)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{5^{2n+1}}$

7) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ diverge.

8) A série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n 3^{1-n}$ é convergente? Se sim, encontre sua soma:

Solução

1) $S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}$ converge

2) $S = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - 1 = \infty$ diverge

3) Série geométrica com razão $r = \frac{3}{2} > 1$, diverge

4)

a) $a_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$ $2n+1 > 2n-1$ $\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n-1}$ monótona descrescente

e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$ Portanto, converge.

b) $a_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}$, $(2n+1)! > (2n-1)!$ $\frac{1}{(2n+1)!} < \frac{1}{(2n-1)!}$ monótona descrescente

e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)!} = 0$ Portanto, converge.

c) $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ $(n+1)\ln^2(n+1) > n\ln^2 n$ pois $\ln x$ é crescente

Então, $a_{n+1} < a_n$ monótona descrescente e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ln^2 n} = 0$ Portanto, converge.

5) $S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{n+4}}\right) = \frac{1}{2}$ converge

6)

a) converge para $\frac{81}{14}$ b) converge para 2 c) converge para $\frac{e^2}{e^2-4}$

d) converge para $\frac{1}{16(4-\pi)}$ e) converge para $\frac{1}{2}$ f) converge para $\frac{5}{18}$

7) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{5} \neq 0$ portanto, diverge.

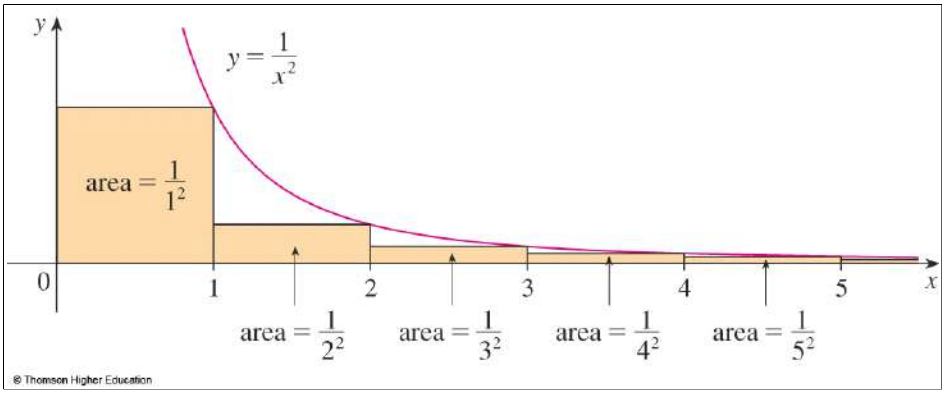
8) Série geométrica com $S = 6$.

Testes de Convergência

Teorema 6 (**Teste da Integral**):

Seja f uma função contínua, positiva e decrescente, definida para $x \geq 1$, e seja $a_n = f(n)$. Então ambas, a série e a integral, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\int_1^{\infty} f(x)dx$ convergem ou ambas divergem.

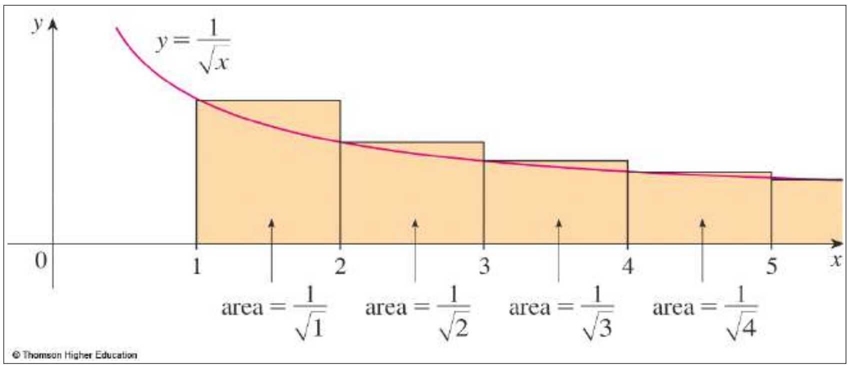
Ilustração:



$$\boxed{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$$

é menor que $\boxed{\frac{1}{1^2}+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=2}$

portanto: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge



$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

é maior que $\int_1^{\infty}(1/\sqrt{x})\,dx$

portanto: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge

Exemplo 10: Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge e a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge.

Solução:

$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int_1^b \frac{1}{x}dx = \ln b - \ln 1 \Rightarrow \ln b, \quad \lim_{b\to\infty}\ln b = +\infty \;\therefore\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ diverge .}}$

$\boxed{f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_1^b \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{b}+1 \Rightarrow \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{b}+1 = \lim_{b\to\infty}\frac{b-1}{b} = 1 \;\therefore\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ converge.}}$

Observação 4: O valor encontrado na integral NÃO é o valor para o qual a série converge.

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler 1736)

ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ problema em aberto ainda hoje.

Exemplo 11: Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ converge.

Teorema 7 (**Critério da Comparação**):

Sejam $a_n, b_n \geq 0\ \forall\ n$. Se existem $c > 0$ tal que $a_n \leq cb_n\ \forall\ n$, então:

a) $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

b) $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge

Exemplo 12: Mostre que a série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+n)^2}$ converge.

Exemplo 13: Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Teorema 8: (**Teste da Comparação dos Limites**)

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ duas séries de termos positivos,com $b_n \neq 0,\ \forall\ n = 1,2,\ldots$ e $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = L$, então

a) Se $L > 0 \Rightarrow$ as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são ambas convergentes ou ambas divergentes

b) Se $L = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge

c) Se $L = \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também é divergente.

Exemplo 14: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{n2^n}$ converge?

Exemplo 15: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n^3+1}$ diverge?

Corolário (**Teste da Razão ou de D'Alembert**):

Se $a_n > 0$ e se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Exemplo 16: Use o teste da razão para determinar se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ converge:

Observação 5:

i) Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

ii) Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, não se pode afirmar nada.

Exemplo 17: Use o teste da razão para determinar se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergem ou divergem.

Exemplo 18: Use o teste da razão para determinar se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge ou diverge.

Teorema 9 (**Teste da Raiz ou de Cauchy**):

Se $a_n > 0$ e se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r < 1$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge .

Observação 6: Se $r > 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge e se $r = 1$ nada se pode afirmar.

Exemplo 19: Use o teste da raiz para determinar se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergem ou divergem:

Exemplo 20: Use o teste da raiz para determinar se $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^n$ converge:

Lista de Exercícios 12

1) Use o teste da integral para determinar se as seguinte séries convergem ou divergem.

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)} \qquad c)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

2) Use o teste da comparação para determinar se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n^3-1)}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(2n^2+4n+3)}$ convergem ou divergem.

3) Use o teste da comparação dos limites para determinar se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-4n+5}$ converge ou diverge.

4) Use o teste da razão para determinar se as seguintes séries convergem ou divergem.

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^n$

5) Use o teste da raiz para determinar se as seguintes séries convergem ou divergem

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$

Respostas

1) a) converge para $p > 1$ e diverge para $p < 1$

b) diverge c) diverge

2) convergem

3) converge

4)

a) converge b) converge c) diverge d) diverge e) nada se pode afirmar

5)

a) converge b) nada se pode afirmar c) nada se pode afirmar d) converge

Séries de Potência:

Definição 4: Uma série do tipo $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é chamada série de potências com centro em zero.

Definição 5: Uma série do tipo $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ é uma série de potências com centro em x_0.

Observação 1: É suficiente considerar séries de potências do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, pois séries do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ficam reduzidas ao caso anterior mediante a uma mudança de variável $y = x - x_0$.

Observação 2: A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sempre converge no ponto $x = 0$ (no centro). Se $x = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 0 + a_2 0 + \ldots = a_0$

Teorema 8: A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

a) converge somente se $x = 0$ ou

b) converge absolutamente $\forall\, x \in R$ ou

c) existe $r > 0$ tal que a série converge absolutamente se $|x| < r$ e diverge quando $|x| > r$.

Exemplo 12: $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + \ldots$

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \infty \end{aligned}}$$

então $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ converge somente se $x = 0$.

Exemplo 13: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right|$$
$$= \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}(n+1)^2(n!)^2}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{x^{2n}}$$
$$= \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0 < 1 \qquad \text{for all } x$$

converge absolutamente $\forall\, x \in R$

Exemplo 13: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(x-3)^n}\right|$$
$$= \frac{1}{1+\frac{1}{n}}|x-3| \to |x-3| \qquad \text{as } n\to\infty$$

converge absolutamente se $|x-3| < 1$ e diverge quando $|x-3| > 1$

Exercícios: $a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{2})^n = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \ldots \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

Observação 1: Nada é dito no caso de $|x| = r$. Neste caso, a série pode convergir ou divergir.
Observação 2: r é chamado raio de convergência. Por convenção, caso a) $r = 0$ e b) $r = \infty$.
Observação 3: O intervalo $(-r, r)$ é chamado intervalo de convergência.

Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ podemos usar o teste da razão ou o teste da raiz para determinar o raio de convergência.

Exemplo 14: Determine o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$

Teorema 9: (**Fórmula de Taylor e de Maclaurin**)
Se f é diferenciável em todas as ordens num intervalo aberto I , onde $x, a \in I$, então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \ldots\ldots$$

onde $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ é a série de Taylor de $f(x)$ em a. Além disso, se $a = 0$, essa série é também conhecida como série de Maclaurin de f.

Exemplo 15:Determine a série de Maclaurin de $f(x) = e^x$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \ldots\ldots\ldots$$

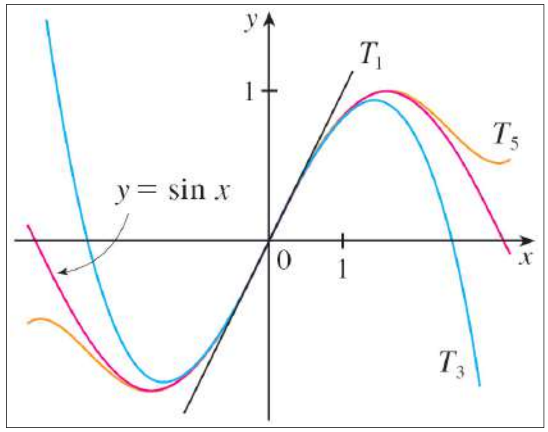
$$\Rightarrow f(x) = e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

Exemplo 16: $f(x) = \sin x$

$$\begin{array}{ll} f(x)=\sin x & f(0)=0 \\ f'(x)=\cos x & f'(0)=1 \\ f''(x)=-\sin x & f''(0)=0 \\ f'''(x)=-\cos x & f'''(0)=-1 \\ f^{(4)}(x)=\sin x & f^{(4)}(0)=0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots \\ &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Observe:



$$\begin{array}{ll} T_1(x)=x & T_3(x)=x-\dfrac{x^3}{3!} \\ T_5(x)=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!} & T_7(x)=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!} \end{array}$$

Exemplo 17:Calcule o valor aproximado de $\sqrt[3]{7,9}$ usando uma série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(8)}{n!}(x-8)^n = f(8) + \frac{(x-8)}{1!}f'(8) + \frac{(x-8)^2}{2!}f''(8) + \ldots + \frac{(x-8)^n}{n!}f^{(n)}(8) + \ldots\ldots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(8)}{n!}(x-8)^n \cong f(8) + \frac{(x-8)}{1!}f'(8) + \frac{(x-8)^2}{2!}f''(8)$$

$$\begin{array}{ll} f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{1/3} & f(8)=2 \\ f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3} & f'(8)=\frac{1}{12} \\ f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-5/3} & f''(8)=-\frac{1}{144} \\ f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-8/3} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(8)+\frac{f'(8)}{1!}(x-8)+\frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 \\ &= 2+\tfrac{1}{12}(x-8)-\tfrac{1}{288}(x-8)^2 \end{aligned}$$

$$f(7.9) \cong 2 + \frac{(7.9-8)}{12} - \frac{(7.9-8)^2}{288} = 1.9916$$

Lista de Exercícios 13

1) Determine o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n$. resp: (-1,1)

2) Encontre a série de Maclaurin para as funções.(4ou 5 termos)

$a)\ f(x) = \cos(x).$ $\quad b)\ f(x) = senh(x) = senhx$

3) Calcule o valor aproximado usando uma série de Taylor

a) $\sqrt{3.9}$ b) $\ln(1.3)$ c) $\sqrt{4.1}$

4) Encontre a série de Taylor de ordem 2 para $f(x)$ em a.

a) $f(x) = \ln(1+x)$ $a = 0,$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $a = 1,$ c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ $a = 0.$

Resposta: a) $f(x) \cong x - \frac{1}{3}x^2$, b) $f(x) \cong 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2$, c) $f(x) \cong x + x^2$.